



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΔΙΑΤΑΞΗ - ΑΠΟΛΥΤΑ - ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΑΤΑΞΗ

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $2\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$

β) $3x^2 + 4x + 4 > 0$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 \geq 0$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$

2. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

3. α) Αν α, β ομόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$

4. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

5. Αν $6 < x < 8$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $8 < x + y < 11$

β) $3 < x - y < 6$

γ) $18 < 2x + 3y < 25$

δ) $1 < \frac{x-2}{y+1} < 2$

6. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

7. α. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ και $B = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$.

β. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = (\alpha - \beta)^3$ και $B = \alpha^3 - \beta^3$.

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = \alpha^2 + \beta^2 + 13$ και $B = 4\alpha + 6\beta$.

δ. Αν $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 1 \geq \alpha - \alpha^2$.



ΑΠΟΛΥΤΑ

1. α. Αν $x \leq 1$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x - 3| - 2|x - 1| + |2 - x|$
 β. Αν $x < 2$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x - 2| - 2|3 - x| + |x - 4|$
 γ. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$ β) $0 < A < 4$.
 δ. Αν $x \in [1, 2)$, να αποδείξετε ότι: $3 < |x| - |x - 1| + 2|3 - x| \leq 5$.
2. Α. Αν $\alpha < \beta < \gamma < 0$, να αποδείξετε ότι:
 α) $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha| = 0$ β) $|\alpha + \beta| - |\beta + \gamma| - |\alpha + \gamma| = 2\gamma$ γ) $||\beta - \alpha| + |\beta| - |\gamma|| = |\alpha - \gamma|$
 Β. Αν $\alpha < 1 < \beta$ να αποδείξετε ότι: α) $|1 - \alpha| + |1 - \beta| = |\alpha - \beta|$ β) $|\alpha - 2| + |\beta| - |\alpha - \beta| = 2$
3. Α. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$
 α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$
 Β. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.
 α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$. β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$
4. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.
 α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. i) $|x + 2|$ ii) $|x - 7|$
 β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 2| + |x - 7|$.
 γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.
 δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.
5. Α. Αν $x \neq y$, να αποδείξετε ότι $|x - y| + \frac{1}{|x - y|} \geq 2$.
 Β. Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα; (δικαιολόγηση)
 Γ. Να αποδείξετε ότι: α) $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ β) $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$



ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{x-1}$

β) $\sqrt{x^2+2}+3\sqrt{|x|-3}$

γ) $\sqrt{2-|x-1|}$

δ) $\sqrt{x^2-2x+1}$

ε) $\frac{3x}{\sqrt{|x|-x}}$

στ) $\frac{\sqrt{3-|x|}}{x}$

ζ) $\sqrt{x-3}$

η) $\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{|x|-2}$

2. Α. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 2$.

Β. Να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+2} = 3$

β) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}+3} = 2$

Γ. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$

β) $\frac{1}{(5-\sqrt{23})^2} + \frac{1}{(5+\sqrt{23})^2} = 24$

3. Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\sqrt{75}+\sqrt{147}}{\sqrt{192}-\sqrt{108}} = 6$

β) $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = 6\sqrt[3]{2}$

γ) $\sqrt[3]{\frac{25^{14}+125^7}{5^{25}+125^6}} = 5$

Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{9}$

β) $\sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^9} = 4$

γ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = 2\sqrt[12]{2^{11}}$

δ) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = 27\sqrt[3]{9}$

ε) $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{9\sqrt{3^5}}} = \sqrt[12]{3^5}$

στ) $\sqrt[10]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[6]{2}$

ζ) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[4]{x^3}, x > 0$

4. Α. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

β) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$

γ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3}$

β) $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{21} + 1$

γ) $\sqrt{8-2\sqrt{10}} > \sqrt{5} - \sqrt{2}$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{5}$

β) $\sqrt{6} + \sqrt{5} < \sqrt{30} + 1$

γ) $\sqrt{12+2\sqrt{30}} > \sqrt{6} + \sqrt{5}$

Δ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ και $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

Ε. Να συγκρίνεται τους αριθμούς: α) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[4]{4}$

β) $\sqrt[4]{10-\sqrt{15}}$ και $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$



5. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = 14$$

$$\beta. \frac{\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2} - \frac{\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2} = 12$$

$$\gamma. \frac{1}{4-2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3}{2}$$

$$\delta. \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \sqrt{6} = 3$$

$$\epsilon. \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}-2} = 2$$

6. Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει η σχέση: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, τότε να δείξετε ότι:

α. $x=3$ και $y=2$ β. οι αριθμοί $y-\sqrt{x}$ και $y+\sqrt{x}$ είναι αντίστροφοι

γ. να υπολογισθεί η παράσταση: $M = \sqrt[3]{\sqrt{2x}-\sqrt{y}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2x}-\sqrt{y}} \cdot \sqrt[3]{y}$

7. Δίνονται οι αριθμοί $A = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ και $B = \sqrt{5} + \sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A^2 + B^2 = 14 \quad \beta) \sqrt{3} \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = 3 \quad \gamma) \frac{\sqrt{5}}{A} - \frac{\sqrt{2}}{B} = \frac{7}{3}$$

8. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{15} + \sqrt{10}$ και $\beta = \sqrt{30} - \sqrt{5}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 60$ β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+1}$

γ. Να ρητοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{1}{\alpha}$ και $\frac{1}{\beta}$ δ. Να υπολογίσετε την παράσταση $B = \frac{5}{\beta} - \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$.

9. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ και $\beta = \sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}$

α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ και $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ β. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

γ. Να απλοποιήσετε για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, την παράσταση $A = |x + \alpha| + \left| x - \frac{\beta^2}{2} \right|$.

10. Δίνονται οι αριθμοί $A = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ και $B = \sqrt[3]{\sqrt{349}}$

α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B β. Να υπολογίσετε την παράσταση: $\frac{1}{A^2-B^2} + \frac{1}{A^2+B^2}$

11. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = |\pi^2 - 9| - |\pi^2 - \pi| - |\pi - 3|$ και $\beta = |\sqrt{3} - 2| - |\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2|$.

α. Να υπολογίσετε τα α, β .

β. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\gamma = \sqrt[3]{\sqrt{-4\alpha} - \sqrt{20\beta}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{-4\alpha} + \sqrt{20\beta}} \cdot \sqrt[3]{2\beta}$

γ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{\gamma}-1} - \frac{2\gamma+\beta}{\sqrt{-\alpha}-1} = \sqrt{\gamma} - \sqrt{-\alpha}$.