



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΑΠΟΛΥΤΑ – ΡΙΖΕΣ»

ΘΕΜΑ Α (Θέματα θεωρίας)

- A1.** Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- A2.** Να αποδείξετε ότι: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- A3.** Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ και n φυσικός.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αληθείς ή ψευδείς.
- $|x^2| = |-x|^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Ισχύει πάντα: $|\alpha| \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{|\alpha|^n} \cdot \beta$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ και n φυσικός.
 - Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $-|x| \leq x \leq |x|$.
 - Αν $\sqrt[n]{|\alpha|^n} + \sqrt[n]{|\beta|^n} = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.
 - Αν $\sqrt[n]{|\alpha|^n} - \sqrt[n]{|\beta|^n} = 0$ τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και n φυσικός.
 - Αν $\sqrt[n]{|\alpha|^n} \leq \sqrt[n]{|\beta|^n}$, τότε $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και n φυσικός.
 - Αν $\sqrt[n]{|\alpha|^n} + \sqrt[n]{|\beta|^n} > 0$ τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και n φυσικός.
 - Αν $|- \alpha| = -\alpha$, τότε $\alpha \leq 0$.
 - Για κάθε $\alpha \leq 0$ ισχύει πάντα: $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$, όπου n άρτιος φυσικός.
 - Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης: $x^3 = 2$.
 - Αν $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι: $\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$.
 - Ισχύει ότι: $d(x, \alpha) = d(\alpha, x)$ για κάθε $\alpha, x \in \mathbb{R}$.
 - Ισχύει ότι: $|- \alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |- \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - Αν $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}$
 - Αν $|x| = \alpha$, με $\alpha \geq 0$, τότε: $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
 - Αν α, β μη μηδενικοί και $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, τότε α, β ομόσημοι.
 - Ο αριθμός $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ είναι ρητός.
 - Ισχύει ότι: $\sqrt[n]{\alpha^{-\mu}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha^\mu}}$, όπου $\alpha > 0$, n θετικός ακέραιος και μ ακέραιος.
 - Ισχύει ότι: $3 \cdot \sqrt[3]{2} < 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
 - Ισχύει ότι: $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2}$.



ΘΕΜΑ Β

1. Αν $|x| < 2$ να υπολογιστεί η παράσταση: $K = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 2 \cdot |x + 4|$.

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$A = \sqrt{8} - 10\sqrt{2} + 5\sqrt{32} - 2\sqrt{50} \quad , \quad B = 8\sqrt{20} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{80} + \sqrt{45}$$

$$\Gamma = \sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{75} - \sqrt{48} \quad , \quad \Delta = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - 7\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{128}$$

3. Να μετατρέψετε τους παρονομαστές των παρακάτω κλασμάτων από άρρητους σε ρητούς.

$$\frac{7}{3\sqrt{2} - 2} \quad , \quad \frac{10}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad , \quad \frac{6}{\sqrt[4]{2}} \quad , \quad \frac{8}{\sqrt[3]{5} - 1} \quad , \quad \frac{20}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$$

4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\Sigma = \frac{x^2 - 49}{|x| - 7} - \frac{x^2 + 10 \cdot |x| + 25}{|x| + 5}$.

5. Αν $|2x - 3| \leq -4x^2 + 12x - 9$, να υπολογισθεί η τιμή του x .

6. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$M = \frac{3\sqrt{12} + \sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 8}{3\sqrt{27} + \sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 12} \quad , \quad N = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{32}}{4 \cdot \sqrt[8]{2}}$$

7. Αν $|a - b| = |a| + |b|$, με $a \neq 0$ και $b \neq 0$ τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι ετερόσημοι.

8. Αν $\left| \frac{2a - 3}{3a + 2} \right| = 1$, με $a \neq -\frac{2}{3}$, να αποδείξετε ότι $a = 1$ ή $a = -1$.

9. Αν $-2 < x < 3$, να δείξετε ότι η παράσταση: $H = |x - 3| - 2 \cdot |-x - 2| - 3 \cdot |1 - x| - 6 \cdot |4 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

10. Αν ισχύει: $\sqrt[5]{4x^2 - 4x + 1} + |x - 3y| = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των x και y .



ΘΕΜΑ Γ

1. α) Να δείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα του $21-12\sqrt{3}$ είναι ο αριθμός $2\sqrt{3}-3$.

β) Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης : $B = (2\sqrt{3} + 3) \cdot \sqrt{21-12\sqrt{3}}$

2. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}, \quad \beta) \frac{\sqrt[3]{\sqrt{64}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{8}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[3]{64}}}{\sqrt[8]{4} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\gamma) \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{5 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{14}}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{14}}}$$

$$\delta) (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

3. Να δείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι ρητοί.

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}},$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad \delta = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$$

4. α) Να συγκριθούν οι αριθμοί: $9\sqrt{3}$ και $11\sqrt{2}$.

β) Να δείξετε ότι η κυβική ρίζα του αριθμού $|11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}|$ είναι ο αριθμός: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

γ) Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{|9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}|}$ είναι ρητός.

5) Αν $\kappa = \sqrt{13 + \sqrt{133}} - \sqrt{13 - \sqrt{133}}$ τότε:

α) να υπολογίσετε τον κ^2 , β) να υπολογίσετε τον $\lambda = \left(\frac{2}{2\sqrt{5} + \kappa} + \frac{2}{2\sqrt{5} - \kappa} \right) \cdot \frac{3}{\sqrt{80}}$