



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άθροισμα και γινόμενο ριζών εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

1. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

α) $x^2 + 4x - 2 = 0$

β) $-x^2 + 3x + 6 = 0$

γ) $-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x + 7 = 0$

δ) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12}x + 1 = 0$

2. α) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζα το 5 και ισχύει $\frac{\gamma}{\alpha} = -10$. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$

β) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $\beta = 6\alpha$. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$

3. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 6 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει: $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = 2$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β . β) Να λύσετε την εξίσωση που προκύπτει.

4. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 2x - 8 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1^3 + x_2^3$

ε) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

στ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

ζ) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

η) $(x_1 - x_2)^2$

θ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

5. Δίνεται η εξίσωση: $(\mu + 2)x^2 + 2\mu x + \mu - 1 = 0$ με παράμετρο $\mu \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το μ ώστε:

i) $x_1 \cdot x_2 = -3$ και ii) $x_1 + x_2 = 2$

6. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης: $x^2 - 2(\mu + 1)x + \mu^2 + 3 = 0$ είναι 7. Να βρείτε:

α) τον αριθμό μ και β) το άθροισμα των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

7. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς: α) -3 και 5 β) 0 και -1 γ) -6 και 2

8. Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να υπολογίσετε το $A + B$ και $A \cdot B$

β) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A και B.



9. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1 και x_2 .

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $x_1^{-1} + x_2^{-1}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς: $\rho_1 = x_1^{-1}$ και $\rho_2 = x_2^{-1}$.

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\mu x + 4(\mu - 1) = 0$ (1) με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε για ποια τιμή του μ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

11. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\mu x - 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε για ποια τιμή του μ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 = 7(x_1 \cdot x_2)^{2024}$

γ) Για $\mu = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Sigma = x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

12. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (2\mu - 1)x + 2\mu - 6 = 0$ (1) με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η εξίσωση (1) έχει ρίζες ι) αντίθετες ii) αντίστροφες.

13. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού μ η εξίσωση: $x^2 - 4\mu x - 2(\mu + 2) = 0$ έχει ρίζες:

α) ομόσημες και β) ετερόσημες

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση: $x^2 + (\mu - 4)x - \mu + 3 = 0$ έχει:

α) μία διπλή ρίζα β) δύο ρίζες αντίστροφες γ) δύο ρίζες αντίθετες
δ) δύο ετερόσημες ρίζες ε) δύο θετικές ρίζες στ) δύο αρνητικές ρίζες

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 1 = 0$. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της χωρίς να λυθεί να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ii) $x_1^2 + x_2^2$ iii) $x_1^3 + x_2^3$ iv) $x_1^{-2} + x_2^{-2}$

16. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $3x^2 - 2(\kappa + 1)x - \kappa + 1 = 0$ να ισχύει:

$$2x_1^2 + 3x_1^2x_2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2^2 = \frac{12}{7}$$

17. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2(\kappa - 1)x + \kappa + 1 = 0$ να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$

18. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\kappa + 1)x + \kappa = 0$ να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $3x_1 + 2x_2 = 7$

19. Να βρεθούν οι εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $-3, \frac{1}{3}$ ii) $4 + 3\sqrt{3}, 4 - 3\sqrt{3}$ iii) $-\sqrt{2}, 2$ iv) $a - b, a + b$



20. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 3 = 0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη:

α) $\rho_1 = x_1 + 2, \rho_2 = x_2 + 2$ β) $\rho_1 = \frac{1}{x_1}, \rho_2 = \frac{1}{x_2}$

21. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2)$ είναι ανεξάρτητη του λ

B ΟΜΑΔΑ

1. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 + 3x + 2\lambda + 6 = 0$ να έχει δύο ρίζες αντίστροφες.

2. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 3)x + 5\lambda = 0$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

3. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $3x^2 + (x + 1) \cdot \lambda - x \cdot \lambda^2 = 2(1 - 10x)$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

4. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}. (1)$

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1)

1) Να βρεθεί εξίσωση 2^{ου} βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 - 1$ και $\rho_2 = x_2 - 1$.

2) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αντίθετες; Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) στην περίπτωση αυτή;

3) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αντίστροφες;

4) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $A = (x_1 - \lambda)^{2023} (x_2 - \lambda)^{2023} + 1$ είναι ανεξάρτητη του λ .

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}, (1)$

α. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του λ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να βρεθεί η τιμή του λ ώστε: $x_1 \cdot \left(1 - \frac{6x_2}{7}\right) + x_2 - \frac{6}{7} = 288$

6. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 8x - 1 = 0 (1)$

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες και ετερόσημες.

β. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $A = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}, B = x_1^2 + x_2^2$ και $\Gamma = |x_1 - x_2|$

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3\beta x + 4\gamma = 0$ είναι κατά μία μονάδα μικρότερες από τις ρίζες της (1), να βρείτε τις τιμές των β και γ