



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού»

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})x - \sqrt{15} = 0$ β) $6x^2 + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ γ) $36x^2 + (9\sqrt{2} - 4\sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις για κάθε $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

α) $x^2 + (3\beta - 2\alpha)x - 6\alpha\beta = 0$ β) $2x^2 + 7\lambda x - 4\lambda^2 = 0$ γ) $4\lambda^2 x^2 - 11\lambda x - 3 = 0$ δ) $2x^2 - (\alpha + 4\beta)x + 2\alpha\beta = 0$

3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν), ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν μια ρίζα διπλή.

α) $x^2 + 4x - \lambda + 2 = 0$ β) $\lambda x^2 - 6x + \lambda = 0$ γ) $x^2 + 6\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ δ) $x^2 + (\lambda - 3)x + 25 = 0$

4. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + x + 8 = 3(\lambda - x)$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση:

α) έχει πραγματικές λύσεις β) έχει δύο λύσεις άνισες γ) δεν έχει λύσεις

5. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda + 2 = 0$. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση:

α) έχει δυο λύσεις άνισες β) έχει μια λύση διπλή γ) έχει μια μοναδική λύση δ) δεν έχει καμιά λύση

6. Δίνεται η εξίσωση $4(\lambda^2 + 2\lambda - 8)x^2 + 4(\lambda + 3)x + 1 = 0$. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση:

α) έχει δυο λύσεις άνισες β) έχει μια λύση διπλή γ) έχει μια μοναδική λύση δ) δεν έχει καμιά λύση

7. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda + 2)x - 3\lambda^2 = 2$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η εξίσωση έχει ως λύση το 1, να βρείτε τις τιμές του λ . β) Για $\lambda = 1$ να λύσετε την (1).

8. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο λύσεις πραγματικές και άνισες:

α) $x^2 + \lambda x - 3\lambda - 10 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ β) $\lambda x^2 + (\lambda + 2)x - 2\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ γ) $(\lambda^2 + 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $6x^4 - x^2 - 2 = 0$ β) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ γ) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $(2x^2 + 3x)^2 - 4(2x^2 + 3x) = 5$ β) $(2x^2 + x + 1)^2 + 2x^2 + x + 1 = 6$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ β) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$ γ) $-3x^2 + 10|x| = 3$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $6(3x - 1)^2 + 13|3x - 1| - 5 = 0$ β) $2x^2 - 31\sqrt{x^2} - 16 = 0$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $|x^2 - 7x + 11| = 1$ β) $|2x^2 - 9x + 7| = 3$ γ) $|x^2 - x - 2| + |x^2 - 5x + 6| = 0$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $|x - 3| = x^2 + 3x - 2$ β) $|x + 1| = 2x^2 + x - 5$ γ) $|3x - 1| = x^2 - 2x + 5$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2 - 3x} = \frac{x + 2}{x - 3}$ β) $\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x^2 + 3x} = \frac{2x}{x^2 - 9}$ γ) $\frac{x + 2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x + 2} = \frac{7}{4 - x^2}$

16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 9x + 3 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να προσδιορίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $x_1^2 + x_2^2$ δ) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ ε) $(x_1 - x_2)^2$ στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} - \frac{2}{x_1 x_2}$

17. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - x - 8 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να προσδιορίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $(4x_1 - 1)(4x_2 - 1)$ δ) $\frac{1}{4x_1 - 1} + \frac{1}{4x_2 - 1}$ ε) $|x_1 - x_2|$



18. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $4x^2 - x - 2 = 0$, να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 4 \left(2x_1^2 x_2 + \frac{1}{x_1} \right) + 4 \left(2x_1 x_2^2 + \frac{1}{x_2} \right)$$

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 4 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$.

20. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda - 3)x^2 + 4\lambda x + 2\lambda + 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές λύσεις άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

21. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να προσδιορίσετε το λ ώστε η εξίσωση να έχει: i. δυο ρίζες αντίθετες ii. δυο ρίζες αντίστροφες

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $x_1 = 2x_2$.

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (|\lambda| - 2)x + 1 - 3|\lambda| = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να προσδιορίσετε το λ , έτσι ώστε να ισχύει ότι $x_1^2 + x_2^2 + 2 - x_1 - x_2 = 0$.

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 8x + |\lambda - 2| + 10 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε (αν υπάρχει) τιμή του λ ώστε να ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{2}{x_1 x_2} = 4$.

25. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x + 2 = 0$, να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ως ρίζες τους αριθμούς: α) $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ β) $2x_1 - 1$ και $2x_2 - 1$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 2)x - 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $|x_1 + x_2| + x_1 x_2 = 0$.

27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (4\lambda - 1)x + 4\lambda^2 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές λύσεις.

β) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δυο λύσεις αντίστροφες.

γ) Αν $\lambda = -\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης (1), να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ως λύσεις τους αριθμούς $x_1 + 1$ και $x_2 + 1$.