



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΞΙΣΩΣΗ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ »

1. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 - 5x + 6 = 0$

β) $x^2 - 4x + 4 = 0$

γ) $x^2 - x - 6 = 0$

δ) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

ε) $x^2 - 4x + 5 = 0$

στ) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Απαντήσεις :

$\alpha)x = 3 \text{ ή } x = 4 \text{ β)}x = 2 \text{ γ)}x = 3 \text{ ή } x = -2 \text{ δ)}x = 3 \text{ ή } x = -2 \text{ ε)}\text{αδύνατη στ)}x = 3$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

β) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

γ) $2x^2 - 5x + 4 = 0$

δ) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

ε) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$

στ) $-x^2 - 2x + 3 = 0$

Απαντήσεις :

$\alpha)x = 2 \text{ ή } x = \frac{3}{2} \text{ β)}x = \frac{3}{2} \text{ γ)}\text{αδύνατη δ)}x = -2 \text{ ε)}x = 1 \text{ ή } x = \frac{2}{3} \text{ στ)}x = -3 \text{ ή } x = 1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 - (\sqrt{2} + 2)x + \sqrt{8} = 0$

β) $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

γ) $2x^2 + (2 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

δ) $5x^2 - (\sqrt{2} - 10)x - \sqrt{8} = 0$

Απαντήσεις :

$\alpha)x = 2 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ β)}x = -1 \text{ ή } x = -\sqrt{3} \text{ γ)}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = -1 \text{ δ)}x = -2 \text{ ή } x = \frac{\sqrt{2}}{5}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 - 25 = 0$

β) $2x^2 - 8 = 0$

γ) $-3x^2 - 81 = 0$

δ) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8} = 0$

Απαντήσεις :

$\alpha)x = 5 \text{ ή } x = -5 \text{ β)}x = 2 \text{ ή } x = -2 \text{ γ)}\text{αδύνατη δ)}x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$



5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-4x^2 + 50 = 0$

β) $-3x^2 + 9 = 0$

γ) $9x^2 + 36 = 0$

δ) $72x^2 - 8 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha)x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \beta)x = \pm \sqrt{3} \quad \gamma)\text{αδύνατη} \quad \delta)x = \pm \frac{1}{3}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 - 7x = 0$

β) $2x^2 - 4x = 0$

γ) $-3x^2 + 9x = 0$

δ) $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{20}x = 0$

ε) $\frac{1}{3}x^2 - 9x = 0$

στ) $-5x^2 + 20x = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha)x = 0 \text{ ή } x = 7 \quad \beta)x = 0 \text{ ή } x = 2 \quad \gamma)x = 0 \text{ ή } x = 3 \quad \delta)x = 0 \text{ ή } x = -2 \quad \epsilon)x = 0 \text{ ή } x = 27 \quad \sigma\tau)x = 0 \text{ ή } x = 4$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $(x^2 - 2x)(x^2 + 3x - 4) = 0$

β) $(4x^2 - 16)(x^2 - 5x) = 0$

γ) $(x^2 + 3x - 10)(x^2 + 5x - 6) = 0$

δ) $(x^2 - 81)(2x^2 - 6x + 7) = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha)x = 0 \text{ ή } 2 \text{ ή } -4 \text{ ή } 1 \quad \beta)x = \pm 2 \text{ ή } 0 \text{ ή } 5 \quad \gamma)x = -5 \text{ ή } 2 \text{ ή } -3 \text{ ή } -2 \quad \delta)x = \pm 9$$

8. (Τράπεζα θεμάτων) α) Να λύσετε την εξίσωση : $|2x - 1| = 3$

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος, να λύσετε την εξίσωση :

$$\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$$

Απαντήσεις :

$$\alpha)x = 2 \text{ ή } -1 \quad \beta)x = 3 \text{ ή } -1$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-\frac{(x-2)(x+2)}{3} = \frac{3-x}{4} - \frac{(x-5)^2 - 36}{12}$

β) $\frac{x(4x-5)}{3} - \frac{(3x-2)^2 + 4}{4} = 1 - \frac{x-5}{2}$

Απαντήσεις :

$$\alpha)x = -1 \text{ ή } -\frac{4}{3} \quad \beta)\text{αδύνατη}$$



10. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $|x^2 - 3x + 3| = 1$

β) $|x^2 + 2x + 8| = 7$

γ) $|x^2 + 3x - 5| = |2x^2 - 4x + 5|$

δ) $|2x^2 + 5x - 3| + |2x^2 - 5x + 2| = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = 1 \text{ ή } 2 \quad \beta) x = -1 \quad \gamma) x = 5 \text{ ή } 2 \text{ ή } 0 \text{ ή } \frac{1}{3} \quad \delta) x = \frac{1}{2}$$

11. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων :

α) $x^2 + (\lambda - 4)x - 4\lambda = 0$

β) $2x^2 + (4\lambda - 1)x + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

Απαντήσεις :

α) 2 ρίζες άνισες β) αδύνατη

12. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων :

α) $x^2 - (2\lambda - 3)x - \lambda(4 - \lambda) = 0$

β) $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda > -\frac{9}{4} \text{ 2 ρίζες άνισες } \lambda = -\frac{9}{4} \text{ διπλή ρίζα } \lambda < -\frac{9}{4} \text{ αδύνατη}$$

$$\beta) \text{ αν } \lambda = 3 \text{ 1ο βαθμια } x = -\frac{3}{2}, \text{ αν } \lambda \neq 3 \text{ 2ο βαθμια για } \lambda < 5 \text{ 2 ρίζες άνισες}$$

$$\lambda = 5 \text{ μια διπλή ρίζα, } \lambda > 5 \text{ αδύνατη}$$

13. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\lambda x^2 - (\lambda - 3)x - 3 = 0$

β) $(\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 0 \text{ 1ο βαθμια } x = 1 / \lambda \neq 0$$

$$\beta) \text{ αν } \lambda = 2 \text{ 1ο βαθμια } x = 1, \text{ αν } \lambda \neq 2 \text{ έχει ρίζες } x = \frac{\lambda + 4}{\lambda - 2} \text{ ή } x = 1$$

14. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Αν η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

Απαντήσεις :

α) $\lambda = 2$ ή -1 β) αδύνατη

15. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = \frac{1}{2} \quad \beta) \Delta = (\lambda + 1)^2$$



16. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 - (\lambda + 3)x + 2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 2

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση .

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 2 \beta) x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

17. Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1) και $x^2 + (3\lambda - 8)x + \lambda^2 - 3\lambda = 0$ (2)

η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι και ρίζα της εξίσωσης (2) να βρείτε :

α) να βρείτε την τιμή του λ β) τις ρίζες της εξίσωσης (2) .

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 3 \beta) x = 0 \text{ ή } x = -1$$

18. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση :

α) έχει δυο ρίζες άνισες

β) έχει μια διπλή ρίζα

γ) είναι αδύνατη

δ) έχει λύση

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda > 2 \beta) \lambda = 2 \gamma) \lambda < 2 \delta) \lambda \geq 2$$

19. (Τράπεζα θεμάτων)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις : $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4)$$

με $\alpha\gamma \neq 0$. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή αποδεικνύοντας ότι : Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\gamma \neq 0$, τότε :

i. $\rho \neq 0$ ii. Ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4)

Απαντήσεις :

$$\alpha) (1)x = 4 \text{ ή } \frac{2}{3} \quad (2)x = \frac{1}{4} \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

20. (Τράπεζα θεμάτων) α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = -1 \text{ ή } x = 4$$



21. **(Τράπεζα θεμάτων)** Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

Απαντήσεις :

$$\beta) x = \lambda + 1 \text{ ή } x = \lambda - 1 \quad \gamma) -1 < \lambda < 3$$

22. **(Τράπεζα θεμάτων)** Δίνεται η εξίσωση : $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$
β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι : $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$
γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε : $|\rho_1 - \rho_2| = 2$

Απαντήσεις :

$$\gamma) \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1$$

23. **(Τράπεζα θεμάτων)**

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι , ώστε όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από την σχέση :

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος ;
β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος ;
γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή : $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια :
i. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5
ii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 65 \quad \beta) x = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{5}{2} \quad \gamma) \text{ i) αδύνατη ii) } \lambda \geq 16$$

24. **(Τράπεζα θεμάτων)** Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή .
β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες .

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = 1 \quad \beta) x_1 = \frac{-\lambda + 1}{\lambda} \text{ και } x_2 = -1 \quad \gamma) \lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}$$



2. Άθροισμα & γινόμενο ριζών – Τύποι Vietta

1. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :

$$\alpha) \quad x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\beta) \quad -x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$\gamma) \quad -\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x + 7 = 0$$

$$\delta) \quad \sqrt{3}x^2 - \sqrt{12}x + 1 = 0$$

Απαντήσεις :

$$\alpha) s = -2 \text{ και } p = -2 \quad \beta) s = 3 \text{ και } p = -6 \quad \gamma) s = 2\sqrt{2} \text{ και } p = -14 \quad \delta) s = 2 \text{ και } p = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ έχει ρίζα το 5 και ισχύει ότι $\frac{\gamma}{\alpha} = -10$. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$.

Απαντήσεις : $\frac{\beta}{\alpha} = 3$

3. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει ότι $\beta = 6\alpha$. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Απαντήσεις : $\frac{\gamma}{\alpha} = -7$

4. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + 6 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = 2$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) Να λύσετε την εξίσωση που προκύπτει

Απαντήσεις :

$$\alpha) \alpha = -3 \text{ και } \beta = -12 \quad \beta) x_1 = 2 + \sqrt{2} \text{ και } x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

5. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq -2$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \quad \beta) \lambda = -\frac{5}{4}$$

6. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες :

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \quad \beta) \lambda = -1$$



7. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης : $x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda^2 + 3 = 0$ είναι 7 .Να βρείτε :

α) Τον αριθμό λ

β) το άθροισμα των ριζών της παραπάνω εξίσωσης

Απαντήσεις :

$\alpha) \lambda = 2 \quad \beta) S = 6$

8. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - 2x - 8 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1^3 + x_2^3$

ε) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

στ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Απαντήσεις :

$\alpha) 2 \quad \beta) -8 \quad \gamma) 20 \quad \delta) 56 \quad \epsilon) -\frac{1}{4} \quad \sigma\tau) -\frac{5}{2}$

9. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 + 5x - 6 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

ε) $(x_1 - x_2)^2$

στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Απαντήσεις :

$\alpha) -5 \quad \beta) -6 \quad \gamma) 37 \quad \delta) -222 \quad \epsilon) 49 \quad \sigma\tau) \frac{37}{36}$

10. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $2x^2 + 2x - 4 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

α) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

β) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

γ) $\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_1}{x_2^2}$

Απαντήσεις :

$\alpha) \frac{5}{4} \quad \beta) -\frac{7}{8} \quad \gamma) -\frac{7}{4}$

11. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) -3 και 5

β) 0 και -1

γ) -6 και 2

Απαντήσεις :

$\alpha) x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \beta) x^2 + x = 0 \quad \gamma) x^2 + 4x - 12 = 0$

12. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α) Να αποδείξετε ότι : $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς A και B

Απαντήσεις :

$\beta) 2x^2 - 6x + 1 = 0$



13. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να αποδείξετε ότι : $A + B = \frac{1}{2}$ και $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B

Απαντήσεις :

β) $20x^2 - 10x + 1 = 0$

14. (Τράπεζα θεμάτων) α) Να λύσετε την εξίσωση : $|x - 2| = \sqrt{3}$

β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α)

Απαντήσεις :

α) $x = 2 + \sqrt{3}$ ή $x = 2 - \sqrt{3}$ β) $x^2 - 4x + 1 = 0$

15. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδόν $E = 24\text{cm}^2$

α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου

Απαντήσεις :

α) $x^2 - 10x + 24 = 0$ β) $x = 6$ ή $x = 4$

16. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Απαντήσεις :

α) $\Delta > 0$ β) $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$ γ) $x^2 - 5x - 2 = 0$

17. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται το τριώνυμο : $x^2 - \kappa x - 2$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1)

i. Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης (1)

ii. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2 όπου : $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$

Απαντήσεις :

α) $\Delta = \kappa^2 + 8 > 0$ β) i) $S = 3$ και $P = -2$ ii) $x^2 - 6x - 8 = 0$



18. (Τράπεζα θεμάτων)

Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν : $\alpha\beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε .

Απαντήσεις :

$$\beta) x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \alpha = 4 \text{ και } \beta = 1 \text{ ή } \alpha = 1 \text{ και } \beta = 4$$

19. (Τράπεζα θεμάτων)

Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν : $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -15$

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β και να τους βρείτε

Απαντήσεις :

$$\beta) x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \alpha = 5 \text{ και } \beta = -3 \text{ ή } \alpha = -3 \text{ και } \beta = 5$$

20. (Τράπεζα θεμάτων)

Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν :

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -12$

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε

Απαντήσεις :

$$\beta) x^2 + x - 12 = 0 \quad \alpha = 3 \text{ και } \beta = -4 \text{ ή } \alpha = -4 \text{ και } \beta = 3$$

21. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνονται δυο πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι , ώστε :

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -64$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β

Απαντήσεις :

$$\beta) x^2 - 12x - 64 = 0 \quad \gamma) \alpha = 16 \text{ και } \beta = -4 \text{ ή } \alpha = -4 \text{ και } \beta = 16$$

22.

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 2 = 0$, να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $\frac{1}{x_1^2}$ και $\frac{1}{x_2^2}$

β) $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$

γ) $x_1^2 - x_1x_2$ και $x_2^2 - x_1x_2$

Απαντήσεις :

δ) $\frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3}$ και $\frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3}$

$$\alpha) 4x^2 - 20x + 1 = 0 \quad \beta) x^2 + 44x - 2 = 0 \quad \gamma) x^2 - 24x + 48 = 0 \quad \delta) x^2 - 10x + 1 = 0$$



23. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$ (1)

α) να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες i) αντίθετες ii) αντίστροφες

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = (\lambda - 5)^2 \geq 0 \beta) i) \lambda = 1 \text{ ii) } \lambda = \frac{7}{2}$$

24. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $x^2 - 4x - 2(\lambda + 2) = 0$

έχει ρίζες : α) ομόσημες β) ετερόσημες

Απαντήσεις :

$$\alpha) -4 \leq \lambda < 2 \beta) \lambda > -2$$

25. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση : $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$

α) Μια διπλή ρίζα β) Δυο ρίζες ετερόσημες γ) Δυο ρίζες αρνητικές

δ) Δυο ρίζες θετικές ε) Δυο ρίζες αντίστροφες

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 2 \beta) \lambda < 2 \gamma) 2 < \lambda \leq 3 \delta) \text{ αδύνατη } \epsilon) \lambda = 2$$

26. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda + 3 = 0$

α) Μια διπλή ρίζα β) Δυο ρίζες αντιστροφές γ) Δυο ρίζες αντίθετες

δ) Δυο ετερόσημες ρίζες ε) Δυο θετικές ρίζες στ) Δυο αρνητικές ρίζες

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda = 2 \beta) \lambda = 2 \gamma) \lambda = 4 \delta) \lambda > 3 \epsilon) \lambda < 3 \sigma) \text{ αδύνατο}$$

27. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + 2x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα τους

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = 4(\lambda - 3)^2 \geq 0 \beta) P = 4S \Leftrightarrow \lambda - 0 \text{ ή } \lambda = 6$$

28. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $2x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$

Έχει ετερόσημες ρίζες και η αρνητική ρίζα έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τη θετική ρίζα

Απαντήσεις :

$$-2 < \lambda < 1$$

29. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $-4x^2 + (2 - \lambda)x + 1 - \lambda = 0$

Έχει ετερόσημες ρίζες και η θετική ρίζα έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από την αρνητική ρίζα

Απαντήσεις :

$$1 < \lambda < 2$$



30. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης (1)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει :

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2$$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 \quad \beta) \Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0 \quad \gamma) \lambda = 2$$

31. (Τράπεζα θεμάτων) Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για πίες τιμές του λ , η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1 και x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει :

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \lambda \leq 3 \quad \beta) \lambda = -1$$

32. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης :

i) να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$

ii) για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης : $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0 \quad \beta) i) \lambda = \pm 1 \quad ii) -16$$

33. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δυο ρίζες άνισες

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε :

i) το $S = x_1 + x_2$

ii) το $P = x_1 x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ

Γ) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε :

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της

ii) να βρείτε το λ εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \Delta = 4\lambda^2 + 8 > 0 \quad \beta) i) S = 4 \quad ii) P = 2 - \lambda^2 \quad \gamma) i) x_2 = 2 - \sqrt{3} \quad ii) \lambda = \pm 1$$



3. Εξισώσεις ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

β) $2x^2 = |x| + 1$

γ) $3x^2 + 2|x| - 1 = 0$

δ) $-5|x| = -x^2 - 6$

ε) $6|x| = x^2 - 9$

στ) $4x^2 + |x| - 3 = -2(|x| + 2)$

Απαντήσεις :

$$\boxed{\alpha) x = \pm 1 \quad \beta) x = \pm 1 \quad \gamma) x = \pm \frac{1}{3} \quad \delta) x = \pm 3, x = \pm 2 \quad \varepsilon) x = \pm 3 \quad \sigma\tau) x = \pm \frac{1}{4}}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 + |4x| - 5 = 0$

β) $x^2 - |-6x| = -8$

γ) $-|7x| = 4x^2 + 3$

δ) $-|-8x| = x^2 - 9$

ε) $x^2 - |-6x| = -x^2 - 4$

στ) $3x^2 + |-7x| - 2 = -3(|-x| + 3)$

Απαντήσεις :

$$\boxed{\alpha) x = \pm 1 \quad \beta) x = \pm 4, x = \pm 2 \quad \gamma) \text{αδύνατη} \quad \delta) x = \pm 1 \quad \varepsilon) x = \pm 1, x = \pm 2 \quad \sigma\tau) \text{αδύνατη}}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(2x - 1)^2 + 7(2x - 1) - 8 = 0$

β) $(x - 3)^2 - 5(3 - x) + 6 = 0$

γ) $(4x - 1)^2 - 6(1 - 4x) - 7 = 0$

δ) $\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \frac{3x-6}{2} - 18 = 0$

Απαντήσεις :

$$\boxed{\alpha) x = 1 \text{ ή } x = -\frac{7}{2} \quad \beta) x = 0 \text{ ή } x = 1 \quad \gamma) x = -\frac{3}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{2} \quad \delta) x = 14 \text{ ή } x = -4}$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 4 = 0$

β) $(x^2 - 2x)^2 - 6x^2 + 12x + 9 = 0$

γ) $x^2(x - 3)^2 + 2(3x - x^2) - 15 = 0$

δ) $(x^2 + 3x) + 2^2 - 6x^2 - 18x - 12 = 0$

Απαντήσεις :

$$\boxed{\alpha) x = -2 \text{ ή } x = 1 \quad \beta) x = -1 \text{ ή } x = 3 \quad \gamma) x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \delta) x = -2 \text{ ή } x = -1, x = -4 \text{ ή } x = 1}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(x - 2)^2 - 3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 10 = 0$

β) $(3x - 1)^2 - 4\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + 3 = 0$

γ) $(|x| - 1)^2 - 3\sqrt{x^2 - 2|x| + 1} - 4 = 0$

δ) $(x + 3)^2 - 2\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 15 = 0$

Απαντήσεις :

$$\boxed{\alpha) x = 7 \text{ ή } x = -3 \quad \beta) x = \frac{4}{3} \text{ ή } x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = 0 \quad \gamma) x = 5 \text{ ή } x = -5 \quad \delta) x = 2 \text{ ή } x = -8}$$



6. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

β) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

γ) $2x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

δ) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = \pm 2 \text{ ή } x = \pm \sqrt{2} \quad \beta) x = \pm 1 \quad \gamma) x = \pm \sqrt{2} \text{ ή } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \delta) x = \pm \sqrt{3}$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

β) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$

γ) $x^8 + 10x^4 - 9 = 0$

δ) $-16x^8 - 15x^4 + 1 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = -2 \text{ ή } x = 1 \quad \beta) x = \sqrt[3]{3} \text{ ή } x = 1 \quad \gamma) \text{ αδύνατη } \quad \delta) x = \pm \frac{1}{2}$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$

β) $x + 4\sqrt{x} - 5 = 0$

γ) $2x + 7\sqrt{x} + 6 = 0$

δ) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = 36 \quad \beta) x = 1 \quad \gamma) \text{ αδύνατη } \quad \delta) x = 1$$

9. (Τράπεζα θεμάτων)

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης : $-2x^2 + 10x = 12x$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = 3 \text{ ή } x = 2 \quad \beta) x = 3$$

10. (Τράπεζα θεμάτων) Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2-x}$

όπου x πραγματικός αριθμός

α) να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 0$

β) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει : $A = B$

Απαντήσεις : $\beta) x = -2$

11. (Τράπεζα θεμάτων)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση : $\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο ερώτημα (α) να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$

Απαντήσεις : $\beta) x = -\frac{1}{2}$



12. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση : $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες , τις οποίες και να προσδιορίσετε .
- β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής : $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ η οποία να έχει δυο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες . Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε .

Απαντήσεις :

$$\alpha) x = \pm\sqrt{5} \text{ ή } x = \pm 2 \quad \beta) x = \pm 3$$

13. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, με β, γ πραγματικούς αριθμούς . Η παραπάνω εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει : $|x_1 + x_2| = 4$

- α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β
- β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$
- γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση : $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1) να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο ερώτημα (α) , η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες .

Απαντήσεις :

$$\alpha) \beta = 4 \text{ ή } \beta = -4 \quad \gamma) \beta = -4$$