





12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 0$

ii) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.

13. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x^2 + 2y^2 + 1$ και $B = 2y(1-x)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $A - B = (y-1)^2 + (x+y)^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $A \geq B$.

iii) Αν $A = B$, να βρείτε τις τιμές των x και y .

14. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - \beta - 1)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

15. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$

ii) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$.

16. Να αποδείξετε τις ανισότητες: i) $2x^2 + 1 > 2x$ ii) $x^4 - x^2 + 4x + 5 > 0$.

17. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $3\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + 8 \geq 4(\alpha + \beta)$.

18. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις

$$1 \leq x < 3 \quad \text{και} \quad 2 \leq y < 4.$$

να αποδείξετε ότι: i) $-7 < 5x - 3y < 9$ ii) $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$.

19. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις $5 < x < 7$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

i) $11 < x + 2y < 17$ ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{8}{15}$ iii) $0 < x - y < 4$ iv) $x^2 - y^2 < 48$.

20. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε $\alpha + \beta > 4$ και $\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\alpha > 2$ και $\beta > 2$.

21. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση: $x^3 + x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $x > 0$

ii) $x < 1$.

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

ii) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.



23. Να αποδείξετε ότι: i) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ii) αν $x + y = 1$, τότε $4xy \leq 1$.

24. Έστω a και β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $a + \beta = 1$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \geq 4$.

25. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι: $a\beta \leq \frac{1}{4}$.

26. Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a\beta = 1$, να αποδείξετε ότι: $a + \beta \geq 2$.

27. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $0 < a < 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 2$.

28. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει η σχέση $a > 1$, να αποδείξετε ότι: $a^3 + 3a^2 - 4 > 0$.

29. Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a > \beta$, να αποδείξετε ότι: $a^3 + \frac{1}{\beta} > \beta^3 + \frac{1}{a}$.

30. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $a > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι: $a + \beta^2 < \beta + a\beta$.

31. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $\beta > a > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a-1}{\beta-1} < \frac{\beta}{a} < \frac{\beta-1}{a-1}.$$

32. Αν a, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι: $\frac{a}{\beta^2} + \frac{\beta}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}$.

33. Να αποδείξετε ότι $(x^2 + 1)^2 > 2x^3 + 2x$ για κάθε $x \neq 1$.

34. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει η σχέση $a > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{a-1}{a+1} < \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

35. Αν a, β και γ είναι τρεις θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\frac{a^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a + \beta + \gamma} \geq \frac{a + \beta + \gamma}{3}$.

36. Αν a, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{1}{a^4 + \beta^2} \leq \frac{1}{2a^2\beta} \quad \text{ii) } \frac{a}{a^4 + \beta^2} + \frac{\beta}{\beta^4 + a^2} \leq \frac{1}{a\beta}.$$



37. Αν $x \in [-2, 3]$, να αποδείξετε ότι: i) $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$ ii) $-1 \leq 2 - x \leq 4$.

38. Αν $x \in (-1, 5)$, να αποδείξετε ότι: i) $1 < 4x + 5 < 25$ ii) $(x + 1)^2 < 36$.

39. Αν $\alpha \in (2, 5)$ και $\beta \in (4, 7)$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^3 + \beta^2 > 24$ ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{12}{35}$ iii) $\alpha^6 - \beta^2 > 15$ iv) $\alpha\beta + 20 < 4\alpha + 5\beta$.

40. Αν $x, y \in [2, 3]$, να αποδείξετε ότι: i) $(2x - 3y)(3x - 2y) \leq 0$ ii) $6(x^2 + y^2) \leq 13xy$.

41. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις $x \in (-2, 4)$ και $y \in (3, 6)$, να αποδείξετε ότι:

i) $(x + 2)(y - 6) < 0$ ii) $(x - 4)(y - 3) < 0$
iii) $9x + 2y > 2xy$ iv) $(x + 2)(y - 3) < 18$.

42. Δίνεται η παράσταση: $A = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 10$.

Να αποδείξετε ότι: i) $A = (x - 3)^2 + (2y + 1)^2$

ii) αν $A = 1$, τότε $x \in [2, 4]$ και $y \in [-1, 0]$.

43. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $xy = 6$, $x > 2$ και $y > 2$.

Να αποδείξετε ότι: i) $(x - 2)(x - 3) < 0$ ii) $x + y < 5$.

44. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $x, 2y$. Αφαιρούμε το τετράγωνο $AEZH$ με πλευρά y .

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος $B\Gamma\Delta HZE$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $E = 2xy - y^2$.

ii) Αν ισχύουν οι σχέσεις $3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να αποδείξετε ότι $4 < E < 18$.

