



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : « Πραγματικοί αριθμοί - Δυνάμεις - Ταυτότητες - Πράξεις »

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α. $A = 3x - y - (2x + y) - (x - 1)$

β. $B = 2(x - 1) + 3(y - 1) + x + 5$

γ. $\Gamma = 3x - (x - 1)2 - (2x - y)(-4)$

δ. $\Delta = 6 - 5(-3x + 1) - 4(4x - 1)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $a - [2\beta - (\gamma - 2a)] - (3\beta + \gamma)$

β. $a - [-2[\beta - 3(\beta - \gamma)] - \gamma]$

γ. $-3\{2(1 - 3x) - 3[-3(2x - 1) - 4(3x - 5) - 2x + 1]\}$

3. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις A, B και στην συνέχεια να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή τους :

α. $A = 3 - (x - 3y + 1) - 2(-x + y - 2)$ για $x = 2$, $y = -3$

β. $B = 4x - 3(x - y) - (x + y - 1)(-2)$ για $x = 3$, $y = -1$

4. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις και να βρείτε την αριθμητική τους τιμή για $x = -\frac{1}{2}$ και $y = 0,01$:

α. $3(2x - 3y) - 4[-3x + 2(x + 2y - 1)]$

β. $-2[-2y + x(-2y + 1)] + 3[-2(x + y) + (-2x - 4y + 3)]$

5. α. Αν $x - y = 2$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = -3[2(x + 2y) - 2(3y - 2x)] + 19x - 7y$.

β. Αν $a - \beta = 20$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 3[2(2a + \beta) - 3(a + 2\beta)] - 2a + 11\beta$.

6. α. Αν οι αριθμοί a , $\beta - 2$ είναι αντίθετοι να υπολογίσετε την παράσταση $A = \gamma - a(\beta - \gamma) + \gamma(\beta - 3) - (-a\beta)$.

β. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{a}$, β , με $a \neq 0$ είναι αντίθετοι να δείξετε ότι και οι αριθμοί $x = a - [-(a - 2\beta)3 + 2\beta]$ και $y = 2[4\beta - (\beta + 2)a - 1]$ είναι αντίθετοι.

7. α. Αν $x + y = 201$, να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{6 - 10x + 2(4x - y - 3)}{3(x - w) + 3(y + w)} + 2\left(x + y + \frac{1}{3}\right)$

δαιρείται με το 201.

β. Αν οι αριθμοί $a - 1$, $\beta - 1$ με $a \neq 1$ και $\beta \neq 1$ είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι :

i. $a + \beta = a\beta$

ii. οι αριθμοί $x = 4a - 2(a + 1)\beta$ και $y = 2a - 4(a - \beta)$ είναι αντίθετοι.

8. Αν οι αριθμοί $a - \frac{1}{2}$, $\beta - 2$ με $a \neq \frac{1}{2}$ και $\beta \neq 2$ είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι :

α. $4a + \beta = 2a\beta$

β. οι αριθμοί $x = \frac{a}{2} - \frac{\beta}{4}$ και $y = a\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{2}$ είναι αντίθετοι.

9. Αν $a = 4 - \frac{3 + \frac{2}{3}}{3 - \frac{4}{3}}$ και $\beta = 2 + \frac{\frac{5}{2} - 3}{2 + \frac{1}{2}}$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{a}{\beta}$ και $\left(\frac{a}{\beta} - 2\right)^{2022}$ είναι αντίθετοι.



10. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις με μορφή μιας δύναμης.

α. $2^{-3} \cdot 2^8$ β. $3^9 : (-3)^6$ γ. $(-5)^7 \cdot 5^3$ δ. $7^3 \cdot (-7)^5$ ε. $\frac{4^3 \cdot 2^{-3}}{8^{-2}}$ στ. $\frac{(7^{-1})^2 \cdot (7^2)^{-3}}{7^{-4}}$

ζ. $\left(\frac{3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 3}{3^{-2} \cdot 3^5}\right)^{-2}$ η. $\left(\frac{-5^2 \cdot 5^{-1} \cdot 5^2}{25^{-1} \cdot 25^2}\right)^{-1}$

11. Αν $x \in \mathbb{R}^*$, να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $(x^3)^{-2} \cdot x^7$ β. $(x^2)^{-1} : x^{-5}$ γ. $\frac{(x^{-1})^2 \cdot (x^2)^{-3}}{x^{-10}}$ δ. $\frac{(x^{-3})^2}{(x^3)^{-2}} \cdot \frac{x^5}{[(-x)^2]^3}$ ε. $\frac{(x^{-2} \cdot x^3)^2}{(x^4)^2 \cdot (x^{-1})^{-4}}$

12. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = x^3 + 2xy^2 + y^3$, όταν $x = -2$, $y = 3$ β) $B = \frac{x^2 - xy^2 - 5y}{2x^2y - 7y} + \frac{2x}{y}$, όταν $x = -2$, $y = -1$

γ) $\Gamma = 2^{x-4} - 6 \cdot 4^{x-3} + 1^{x-3} - 7^{x-1}$, όταν $x = 1$ δ) $\Delta = 2x^{-2} - 2^{-x} + x^x - 3(-1)^{-2023}$, όταν $x = -2$

13. Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $(2^3)^5 : 8^2$ β) $(3^4)^5 : 27^3$ γ) $\frac{27^4 \cdot 9^5}{81^4}$ δ) $(256^2 \cdot 512^4) : 1024^5$ ε) $(2^3 \cdot 2^5)^4 : [(-2)^4(-2)^2]^3$

στ) $\frac{(-3)^3[(-3)^2]^4}{-81}$ ζ) $\frac{(-81)^4(-243)^5}{(-27)^7}$ η) $\frac{(-5)^4 \cdot 125^{10}}{(-625)^6}$

14. Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = [(\alpha^2 \beta^{-1})^2 \alpha^{-2} (\beta^2)^{-3}]^{-1} : \left(\frac{\beta^{-2}}{\alpha^4}\right)^{-3}$, όπου $\alpha = 0,01$ και $\beta = 0,1$

β) $B = \frac{\alpha \beta^{-2} (\alpha^{-1} \beta^2)^4 (\alpha \beta^{-1})^2}{\alpha^{-2} \beta (\alpha^2 \beta^{-1})^3 \alpha^{-1} \beta}$, όπου $\alpha = 10^{-3}$ και $\beta = 10^{-2}$

15. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \frac{\alpha^{-43} (\alpha^2 \beta^{-5})^3}{(\alpha^{-3} \beta^5)^2} \cdot \left[\frac{(\alpha \beta)^2}{\alpha^2 \beta^4}\right]^3$ β) $B = \frac{\alpha^{-3} \beta (\alpha^2 \beta)^2}{(\alpha \beta^{-2})^2 \alpha^{-5} \beta^3}$ γ) $\Gamma = \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha^{-1}}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{\beta^3}\right] : \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\right]$

16. Αν $x = -1$ και $y = 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $A = -3x^{201} - (-y)^2 + (2x + y)^{201}$ ii) $B = (x + y)^{x+y} - \left(\frac{x}{y}\right)^x$ iii) $\Gamma = -x^3 - (-x)^5 - x^x$

iv) $\Delta = \frac{(x^{-2}y)^{-3} (xy^2)^{-1}}{x^2 (y^{-3})^2}$

17. Αν για τους πραγματικούς x και y ισχύουν οι σχέσεις $x^y = 2$ και $y^x = 1$, να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = \frac{x^{2y} + y^{2x}}{x^{-y} \cdot y^{-x}}$$



18. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2(x^2 + 1)$

β) $B = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + 2(1 - 4x)$

γ) $\Gamma = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(12 + x^2)$

δ) $\Delta = (3 - x)^3 - (3 + x)^3 + 2x(x^2 + 27)$

ε) $E = (\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha - 3\beta)(2\alpha + \beta) - 3(3\beta^2 - 4\alpha^2)$

στ) $Z = (\alpha + 1)^3 - (\alpha - 1)^3 - (2\alpha + 1)(3\alpha + 2)$

19. Να αποδείξετε τις επόμενες ταυτότητες:

α) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = 0$

γ) $\alpha(\alpha + 3\beta)^2 - \beta(\beta + 3\alpha)^2 = (\alpha - \beta)^3$

δ) $(\alpha^2 + \beta^2)^3 - (\alpha^3 - \beta^3)^2 - 3\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)^2 = (2\alpha\beta)^3$

ε) $(\alpha^\nu + 2)^2 - (\alpha^\nu - 3)^2 - 10(\alpha^\nu - 1) = 5$

στ) $(\alpha^\nu - \beta^\nu)^2 + (\alpha^\nu + \beta^\nu)^2 - 2(\alpha^\nu - \beta^\nu)(\alpha^\nu + \beta^\nu) = 4\beta^{2\nu}$

ζ) $(\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\alpha - \beta + \gamma)^2 - 4\alpha(\beta - \gamma) = 0$

η) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2 - (\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\alpha - \beta + \gamma)^2 = 8\beta\gamma$

θ) $(\alpha + \beta)(\alpha^3 + \beta^3) + 3\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + 6\alpha^2\beta^2 = (\alpha + \beta)^4$

20. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

α) $63^3 - 13^3$ είναι πολλαπλάσιο του 50,

γ) $3^3 + 4^3$ διαιρείται με το 91,

β) $85^3 + 15^3$ διαιρείται με το 100,

δ) $10^9 - 1$ διαιρείται με τον αριθμό 999.

21. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, τότε $\alpha = \beta$,

β) αν $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha + \beta)$, τότε $\alpha = \beta = 1$,

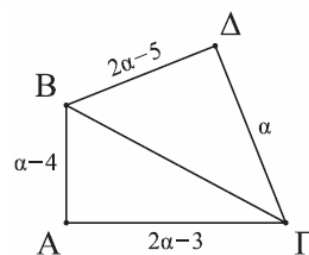
γ) αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 = 2(\alpha + \beta + \gamma)$, τότε: $\alpha = \beta = \gamma = 1$

δ) αν $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, τότε $\alpha = \beta$, ε) αν $\alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$, τότε $\alpha = \beta$,

στ) αν $1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 5$, τότε $\alpha = \beta$.

22. α) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα μήκη των δύο πλευρών δύο τριγώνων.

Αν ένα από τα τρίγωνα ABΓ, ΔBΓ είναι ορθογώνιο στο Α ή στο Δ, να αποδείξετε ότι και το άλλο τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



β) Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABΓ και ισχύει:

$2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

23. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{2\alpha + 2\beta}{3\alpha - 3\beta}$

β) $B = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - 4} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$

γ) $\Gamma = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha + 3} \cdot \frac{\alpha^2 + 6\alpha + 9}{(\alpha - 1)^2}$

δ) $\Delta = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} \cdot \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$

ε) $E = \frac{x - 2}{8x^3 - 27} \cdot \frac{\alpha x - 2\alpha + \beta x - 2\beta}{3 - 2x}$

**24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $A = \frac{3\alpha - 6\beta}{\alpha + \beta} - \frac{5\alpha - 6\beta}{\alpha - \beta} - \frac{4\alpha - 5\beta}{\alpha + \beta} + \frac{7\alpha - 8\beta}{\alpha - \beta}$

β) $B = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta} + \frac{2\beta^3 - \beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$

γ) $\Gamma = \left[\frac{1}{(\mu + \nu)^2} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} \right) + \frac{2}{(\mu + \nu)^3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \right) \right] \mu^2 \nu^2$

δ) $\Delta = \frac{x}{\alpha x - 2\alpha^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2\alpha x - 2\alpha} \left(1 + \frac{3x + x^2}{3 + x} \right)$

ε) $E = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1 \right) \left(\frac{x}{x-y} - 1 \right) + \left(\frac{x^3}{y^3} - 1 \right) \left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} - 1 \right)$

στ) $Z = \left[\left(\alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \alpha \right) \right] : \frac{\alpha^4}{\alpha^2 - \beta^2}$

25. 1. Αν $\frac{x}{y} = -1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\frac{3x + y}{x + 2y}$ β. $\frac{y^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$

2. Αν $\frac{3x + 4y}{5x - 6y} = \frac{1}{3}$, να βρείτε το λόγο $\frac{y}{x}$.

3. Αν $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ και $\frac{y}{z} = \frac{3}{4}$, να βρείτε το λόγο $\frac{x + y}{y + z}$.

4. Αν $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\frac{x + 2}{y + 3}$ β. $\frac{x + y + 5}{y + 3}$

26. 1. Αν $\frac{a}{\beta} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\frac{3a - \beta}{\beta}$ β. $\frac{2a + 3\beta}{2a - \beta}$

2. Αν $\frac{a}{\beta} = -\frac{3}{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\frac{5a}{3a + \beta}$ β. $\frac{3a - 5\beta}{2a - \beta}$

3. Αν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ να αποδείξετε ότι $\frac{5a + 2\beta}{a - 2\beta} = \frac{5\gamma + 2\delta}{\gamma - 2\delta}$.

4. Αν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να δείξετε ότι $\frac{a^2 + \gamma^2}{a\beta + \gamma\delta} = \frac{a}{\beta}$.

5. Αν $x + y = 10$ και $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ να υπολογίσετε τους x, y, z .

27. Να αποδείξετε ότι:

- α) το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος, β) το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος,
 γ) το άθροισμα ενός άρτιου αριθμού και ενός περιττού αριθμού είναι περιττός.

28. Να αποδείξετε ότι:

- α) το γινόμενο δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος, β) το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός,
 γ) το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού με έναν περιττό αριθμό είναι άρτιος.

29. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν ο a είναι άρτιος ακέραιος, τότε και ο a^2 είναι άρτιος, β) αν ο a^2 είναι περιττός, τότε και ο a είναι περιττός.

30. Να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός $n(n + 1)$ είναι άρτιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,
 β) αν ο a είναι περιττός, τότε ο a^2 έχει τη μορφή: $8n + 1$
 γ) αν οι a και β είναι περιττοί, τότε ο $a^2 - \beta^2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.