



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Μέθοδοι αποδείξεων- Αναλογίες»

Εργασία 1η

1. Να αποδείξετε τη συνεπαγωγή: «Αν $a + \frac{2}{a} = 5$, τότε $a^2 + \frac{4}{a^2} = 21$ ».
2. Έστω a ένας ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε τη συνεπαγωγή:
«Αν ο αριθμός $(a-1)^2$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός a είναι περιττός».
3. Έστω a, β ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:
«Οι αριθμοί a, β είναι περιττοί αν και μόνο αν ο $a\beta$ είναι περιττός».

Εργασία 2η

1. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$(a^2 + 4)(\beta^2 + 9) = (3a + 2\beta)^2 \Leftrightarrow a\beta = 6.$$

2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (x^2 - 1)^2 + 3x^2(x^2 + 1) = (2x^2 + 1)^2 - 3x^2$$

$$\text{ii) } (a + \beta)^3 - (a - \beta)^3 = 2\beta(a - \beta)^2 + 4a\beta(a + \beta).$$

3. Έστω a και β δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $a + \beta = 1$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } a^3(\beta + 1) + \beta = \beta^3(a + 1) + a.$$



Εργασία 3η

(Αναλογίες)

1. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{2\alpha + \beta}{\alpha - 2\beta} = \frac{2\gamma + \delta}{\gamma - 2\delta}$

ii) $\frac{2\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} = \frac{2\gamma^2 + \delta^2}{\gamma^2 - 2\delta^2}$

iii) $\frac{\alpha^3 + \gamma^3}{\beta^3 + \delta^3} = \frac{(\alpha + \gamma)^3}{(\beta + \delta)^3}$

iv) $\frac{\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2}{\beta^2} = \frac{\gamma^2 + 3\gamma\delta - \delta^2}{\delta^2}$

2. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{\omega}{7}$ και $4x - 3y + 2\omega = 22$,

να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y και ω .

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y , ω για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$x + y + \omega = 10 \quad \text{και} \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{\omega}.$$

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y , ω οι οποίοι είναι ανάλογοι των αριθμών 5, 7, 9 και τέτοιοι, ώστε

$$2x = y + \omega + 12.$$

5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ , x , y , ω ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x}{\alpha + \beta} = \frac{y}{\beta + \gamma} = \frac{\omega}{\gamma + \alpha},$$

να αποδείξετε ότι

$$(\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma)y + (\gamma - \alpha)\omega = 0.$$