



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΡΙΖΕΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ »

Εργασία 1^η: 1. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}, \quad B = \sqrt{9-6x+x^2}, \quad \Gamma = \sqrt{3-|x|} + \sqrt{|x|-1}, \quad \Delta = \sqrt{\sqrt{x}-3} - \sqrt{5-\sqrt{x}}$$

2. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x έτσι ώστε να ορίζεται η παράσταση: $A = \sqrt{3 - \frac{x+1}{2}} + \sqrt[4]{\frac{x+3}{2} - 1}$

Εργασία 2^η: 1. Αν $2 \leq x \leq 4$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt[6]{(4-x)^6}$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του x).

2. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+12x+36} + \sqrt{(3x^2+1)^2} - \sqrt{(3x^2+5)^2} = 5$.

3. Αν είναι $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{6} - \sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 39$.

4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ αν $0 < x < 1$.

5. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $B = \frac{x\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$, για τις διάφορες τιμές του x

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = x - 2\sqrt{x+1} - \frac{3\sqrt[3]{4x-5} - \sqrt{2x-7}}{\sqrt{x-4}}$, για $x = 8$.

Εργασία 3^η: 1. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{2}$.

2. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{6}-3)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{6}+3)^2}} = 2$.

3. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

4. Να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$ β) $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$.

Εργασία 4^η: 1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \sqrt{32} + 5\sqrt{18} - 10\sqrt{8} + 9\sqrt{72}, \quad \beta) \sqrt{150} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{24} - \sqrt{54},$$

$$\gamma) 8\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}, \quad \delta) (8\sqrt{14} - 6\sqrt{63} + 4\sqrt{28} - 10\sqrt{7}) : 2\sqrt{7}$$

2. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 3\sqrt{2} + \sqrt{200} - \sqrt{50}$ και $B = \sqrt{300} - \sqrt{75} - \sqrt{12}$

α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B . β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Gamma = A^2 - B^2$.

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{200} - 5\sqrt{2} - \sqrt{18}, \quad B = \sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{75} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{\sqrt{12}}{2} + \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{2}} + 2$$

α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τις A, B, Γ .



Εργασία 5^η: 1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}, \quad \text{ii)} \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}, \quad \text{iii)} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$$

$$\text{iv)} \left(\frac{1}{\alpha-\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha+\sqrt{\beta}} \right) : \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha^2-\beta}, \quad \text{v)} \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta} + \frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}+\beta} \right) : \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta} - \frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}+\beta} \right)$$

Εργασία 6^η: 1. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

$$A = \frac{3}{\sqrt{7}}, \quad B = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}, \quad \Gamma = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \quad \Delta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3}, \quad E = \frac{5}{\sqrt[3]{4}}, \quad Z = \frac{7}{\sqrt[4]{8}}, \quad H = \frac{8}{1+\sqrt[3]{3}}, \quad \Theta = \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$$

2. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 4$, $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = 1$.

3. Να δείξετε ότι: $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{162}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}} = 48$

4. α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2018+2018 \cdot 2017}$ είναι φυσικός.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{63} - 7\sqrt{3} + \sqrt{147} - 2\sqrt{7} - \frac{7}{\sqrt{7}}$ είναι ακέραιος.

Εργασία 7^η: 1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας:

$$\text{i)} \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}}, \quad \text{ii)} \sqrt[4]{3\sqrt{2}\sqrt[5]{2}}, \quad \text{iii)} \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}\sqrt{3}}, \quad \text{iv)} \sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha}}, \quad \text{v)} \sqrt[4]{3\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha^3}}, \quad \text{vi)} \sqrt[4]{3\sqrt{\alpha^5}}$$

$$\text{vii)} \sqrt{2\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{4}}, \quad \text{viii)} \sqrt[4]{3\sqrt{\sqrt{(2^2)^4}}}, \quad \text{ix)} \sqrt[5]{\alpha\sqrt{\alpha}\sqrt[3]{\alpha^2}}$$

2. Να βρείτε τα εξαγόμενα:

$$\text{i)} \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^5}, \quad \text{ii)} \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3}, \quad \text{iii)} \sqrt[12]{2^{11}} : \sqrt[4]{2^3}, \quad \text{iv)} \sqrt[6]{5^7} : \sqrt[3]{5^2}, \quad \text{v)} \sqrt[7]{\alpha^2\beta^3} : \sqrt[2]{\alpha\beta^5}$$

Εργασία 8^η: Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $x = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ και $y = \sqrt{3} + 2$. β) $x = \sqrt{5} - 2$ και $y = \sqrt{10} - \sqrt{2}$

γ) $x = \sqrt{11} - \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{19} - \sqrt{11}$. δ) $x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Εργασία 9^η: Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2016} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2016}$ και $B = (\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Gamma = \frac{1}{A-\sqrt{B}} - \frac{1}{A+\sqrt{B}}$

Εργασία 10^η: Δίνεται ο αριθμός: $\alpha = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς i) $\beta = \sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}}$, ii) α^2 , iii) $\gamma = (1+\alpha+2\sqrt{3})^{2020}$

β) Να δείξετε ότι: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{2018} + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{2018} \geq 2$.