



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Διάταξη πραγματικών αριθμών - 1-»

Εργασία 1η

(Απόδειξη ανισοτήτων με χρήση βοηθητικής σχέσης)

1. Αν $\alpha > 5$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + 8 > 13$

β) $6\alpha - 10 > 20$

γ) $-5\alpha + 29 < 4$

δ) $4\alpha > 15 + \alpha$

ε) $3\alpha + 15 > \alpha + 25$

στ) $\frac{3\alpha - 1}{2} + \frac{\alpha - 2}{3} > \alpha + 3$

2. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε

α) $-5\alpha + 2 > -5\beta + 2$

β) $6\alpha - 5 < \alpha + 5\beta - 5$

γ) $\frac{2\alpha}{3} - 1 < \frac{2\beta}{3} - 1$

δ) $-3\alpha + \beta + 1 > -2\beta + 1$

ε) $4\alpha - \beta - 1 < 4\beta - \alpha$

3. Α. Αν $\alpha < 3$, να αποδείξετε ότι $\alpha - 6 < 3 - 2\alpha < 3\alpha^2 - 20\alpha + 30$.Β. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 4\alpha > \alpha\beta^2 + 2\alpha^2 + 4\beta$.Γ. Αν $-4 \leq \alpha \leq -3$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 16\alpha - 64 \leq \alpha^3 - 3\alpha^2 \leq 9\alpha - 27$.4. Α. Αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta - \alpha - 3\beta + 3 > 0$

β) $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 > \alpha^2 + \beta^2 + 10$

Β. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$ 5. Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $(1 - \alpha)(1 + \beta) < \beta - \alpha + 1$

β) $(2 + \alpha)(\beta - 1) > 2(\beta - 1) - \alpha$

γ) $\alpha(\alpha + \beta) + \beta^2 > (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$

δ) $(\alpha - \beta)^2 - \beta(2\beta - \alpha) < (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

6. Αν α, β είναι ετερόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta)(\beta + 1) < \alpha - \beta + 1$

β) $(\alpha - 2)(1 - \beta) > \alpha + 2(\beta - 1) - 1$

γ) $\alpha(\alpha - \beta) < (\alpha - \beta)^2 - \beta(\alpha + \beta)$

δ) $(\alpha + 2\beta)^2 > 9\alpha\beta$

7. Αν α, β είναι αρνητικοί αριθμοί με $\alpha < 3\beta$, να αποδείξετε ότι:

α) $9\beta^2 < 3\alpha\beta < \alpha^2$

β) $\frac{\alpha}{3} < \frac{2\alpha\beta}{\alpha + 3\beta} < \beta$



Εργασία 2η

(Απόδειξη ανισοτήτων, χωρίς την χρήση βοηθητικής σχέσης)

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $9\alpha^2 + \beta^2 \geq 6\alpha\beta$

β) $\alpha^2 + 16\beta^2 \geq 8\alpha\beta$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\beta$

δ) $36\alpha^2 + 12\alpha\beta \geq -\beta^2$

ε) $25\alpha^2 + \beta^2 \geq -10\alpha\beta$

στ) $5\alpha^2 + 5\beta^2 \geq (\alpha + 2\beta)^2$

2. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $x^2 + 2x + 4 > 0$

β) $4x - x^2 < 5$

γ) $9x^2 + 4x + 1 > 0$

δ) $x(3 - 4x) < 1$

ε) $4x^2 + 2xy + 9y^2 \geq 0$

στ) $xy \leq x^2 + y^2$

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

α) $\alpha(\alpha + 8\beta) \geq 4\beta(\alpha - \beta)$

β) $5(\alpha^2 + 5\beta^2) \geq \alpha(\alpha + 20\beta)$

γ) $(4\alpha + \beta)^2 \leq (4\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 4)$

δ) $(6\alpha - \beta)(6\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2 + 3\beta^2 \geq 14\alpha\beta - \alpha^2$

ε) $5\alpha^2 + 24\beta^2 - 26\alpha\beta \leq (3\alpha - 5\beta)^2$

στ) $\left(\frac{3\alpha + \beta}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}\alpha\beta$

4. Α. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

α) $10\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha + 5 > 0$

β) $14\alpha\beta < 5(\alpha^2 + 2\beta^2) + 1$

Β. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $4x^2 + 4xy + 3y^2 \geq 0$

β) $4(x^2 + y^2) \geq 6x(2y - x)$

γ) $5(x^2 + 2y^2) \geq 6x(2y - x)$

δ) $x(5x + y) \geq -5y^2$

5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $4(\alpha^2 + \beta^2) \geq 2\alpha\beta - (\alpha - \beta)^2$

β) $5(\alpha^2 + \beta^2) > 2(\alpha + 6\beta - 5)$

γ) $(4\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + 25y^2) \geq (2\alpha x + 5\beta y)^2$

δ) $(\alpha - 5\beta)^2 \leq 26[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

ε) $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha + \gamma)$

στ) $\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma^2 \geq \alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$