



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 7

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Διάταξη πραγματικών αριθμών - 3-»

Εργασία 1η

(Η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 = 0$)1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

β) $x^2 + y^2 + 10 = 6x + 2y$

γ) $2x^2 + 2y^2 + 1 = 2(x+y)$

δ) $2x^2 + y^2 + 4x + 4 = 2xy$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει:

α) $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = 2(3\alpha + 4\beta)$

β) $2\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2\alpha\beta + 1 = 0$

3. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύει:

α) $x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 2 \cdot (3x - y + 2z)$

β) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 8 = 2 \cdot (2x - 2y - yz)$

4. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίθετοι ενώ οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, όταν ισχύει:

$$x^2 + y^2 + \alpha^2\beta^2 + 1 = 2(\alpha\beta - xy)$$

5. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \leq 2 \cdot (2\alpha - \beta)$

β) $\alpha^2 + 5\beta^2 + 25 \leq 2\beta(\alpha + 10)$

Εργασία 2η

(γενικές ασκήσεις)

1. α. Αν $x > 1$ τότε να αποδείξετε ότι: i) $x^2 > x$ ii) $x^3 + x > x^2 + 1$ β. Αν $x > 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $x^3 > 2x^2 - x + 2$ γ. Αν $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + 2\alpha > 2\beta + \alpha\beta$.δ. Αν $x > y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha = x^3 - y^3$ και $\beta = (x - y)^3$.



2. α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, ρ αν δίνεται ότι $\kappa^2 + \rho^2 = 4\rho - 4$.
- β. Αν $2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.
- γ. Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογώνιου δίνεται ότι: $8, 3 \leq \alpha \leq 8, 5$ και $5, 7 \leq \beta \leq 5, 8$.
Να αποδείξετε ότι:
- i) Η περίμετρός του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 28 και 28, 6.
ii) Το εμβαδόν του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 47, 31 και 49, 3.
3. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο έχει περίμετρο $20m$.
Αν $AB = \Gamma\Delta = x\ m$ και συμβολίσουμε με $E(x)$ το εμβαδόν του, τότε να αποδείξετε ότι:
- i) $A\Delta = B\Gamma = 10 - x$ ii) $0 < x < 10$
iii) $E(x) = -x^2 + 10x$ iv) $E(x) \leq 25$
- ν) Ένα ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο $20m$ έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν όταν αυτό γίνει τετράγωνο.
4. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \frac{\nu}{\nu+1}$.
- β) Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{1001}$.
5. α. Να αποδείξετε ότι: $3(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- β. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;
- γ. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:
- i) $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ ii) $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$ iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$ iv) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{8}$
- Πότε ισχύει οι ισότητες;