

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**
(ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)**ΘΕΜΑΤΑ****Α' ΟΜΑΔΑ**

- 1) Αν $\alpha > 2$ να συγκριθούν οι αριθμοί : $\alpha^3 + \alpha$ και $2\alpha^2 + 2$
- 2) Αν $\alpha < 1$, δείξτε ότι : $\alpha^2 - \alpha + 1 > \alpha^3$.
- 3) Αν $\alpha > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3 + \alpha^2\beta$ και $3\alpha^2\beta - \beta^2\alpha$
- 4) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 8\alpha - 16 < 0$.
- 5) Αν $\alpha\beta < 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = \frac{\alpha-4}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta}$ και $B = \frac{4-\beta}{\alpha} - \frac{4}{\alpha\beta}$
- 6) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} > 2$.
- 7) Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι : i) $\frac{8}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{4} < \frac{3}{2}$, ii) $\alpha^3 > 7\alpha - 6$, iii) $4\alpha - \frac{8}{\alpha^3} > 7$
- 8) Αν $\alpha \geq 1$, να δείξετε ότι : $\alpha^3 + \alpha \geq \alpha^2 + 1$ και $2\alpha^4 + 1 \geq 2\alpha^3 + \alpha^2$.
- 9) Αν $A = 2^{65}$ και $B = 5^{22} - 125^7$, να αποδειχθεί ότι $A > B$.
- 10) Αν $2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή
καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις :
- α) $x + y$ β) xy γ) $x^2 + y^2$ δ) $x^3 + 2y$ ε) $x - y$ ς) $\frac{x}{y}$.
- 12) Αν $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$, να δείξετε ότι :
- i) $0 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ ii) $0 < \frac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1$
- 13) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta + \gamma)$ και $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$
- 14) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 + 2\beta^3 > 3\alpha\beta^2$.
- 15) Αν $\alpha \leq 2 \leq \beta$, να δείξετε ότι : $\alpha\beta + 4 \leq 2(\alpha + \beta)$.



16) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $\frac{\alpha^2}{\alpha^4+1} \leq \frac{1}{2}$ και $2\alpha^4+1 \geq 2\alpha^3+\alpha^2$

17) Αν $\alpha, \beta > 0$, να δείξετε ότι : $\alpha^5+\beta^5 \geq \alpha^4\beta+\alpha\beta^4$

18) Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να δείξετε ότι : $\alpha\gamma+\beta^2 < \alpha\beta+\beta\gamma$.

19) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να δείξετε ότι : i) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{4}$ και ii) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

20) Αν $0 < \alpha \neq 1$, να δείξετε ότι : $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} > \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$.

21) Αν $0 < \beta < \alpha < 1$, να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha + \frac{1}{3} \geq 0$.

22) Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + 1 > \alpha\beta + \alpha + \beta$

B' ΟΜΑΔΑ

23) Αν $\alpha < 2$, δείξτε ότι : $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha < 6$.

24) Δείξτε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + 34 \geq 10\alpha + 6\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

25) Αν $\alpha > \beta > 0$, δείξτε ότι : $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$.

26) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $(1+\alpha^2)^3 \geq (1+\alpha^3)^2$.

27) Αν $4\alpha + 2\beta = 1$, δείξτε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{20}$.

28) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha\beta = 1$, δείξτε ότι : $(1+\alpha)(1+\beta) \geq 4$

29) i) Να δείξετε ότι $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2$, τότε $\alpha + \beta \leq 2$

iii) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, δείξτε ότι : $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma + \alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma$.

iv) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, δείξτε ότι : $1 \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\gamma + \delta)^2} < 2$



30) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$, για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

31) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 1$, δείξτε ότι :

i) $(1 - \alpha)^2 \geq 4\beta\gamma$ και ii) $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \geq 8\alpha\beta\gamma$

32) α) Να δείξετε ότι : $3 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \frac{1}{3}$

γ) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $3 \cdot (\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$

33) Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί με: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$. Να δείξετε ότι :

i) $\frac{\alpha^3}{\alpha + \beta} \geq \frac{3\alpha^2 - \alpha\beta}{4}$, ii) $\frac{\alpha^3}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^3}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^3}{\gamma + \alpha} \geq \frac{1}{2}$

34) Αν α και β θετικοί με $\alpha + \beta = 1$, να δείξετε ότι :

i) $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$, ii) $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$, iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$, iv) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{8}$, v) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

35) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, δείξτε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 3$

(υπόδειξη : $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, $\gamma^2 + 1 \geq 2\gamma$, $\alpha\beta + \gamma \geq 2$ αφού α, β, γ αντιστρόφιοι)