



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Διάταξη πραγματικών αριθμών - 1-»

Εργασία 1η

(Απόδειξη ανισοτήτων με χρήση βοηθητικής σχέσης)

1. Αν $\alpha > 5$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + 8 > 13$

β) $6\alpha - 10 > 20$

γ) $-5\alpha + 29 < 4$

δ) $4\alpha > 15 + \alpha$

ε) $3\alpha + 15 > \alpha + 25$

στ) $\frac{3\alpha - 1}{2} + \frac{\alpha - 2}{3} > \alpha + 3$

2. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε

α) $-5\alpha + 2 > -5\beta + 2$

β) $6\alpha - 5 < \alpha + 5\beta - 5$

γ) $\frac{2\alpha}{3} - 1 < \frac{2\beta}{3} - 1$

δ) $-3\alpha + \beta + 1 > -2\beta + 1$

ε) $4\alpha - \beta - 1 < 4\beta - \alpha$

3. Α. Αν $\alpha < 3$, να αποδείξετε ότι $\alpha - 6 < 3 - 2\alpha < 3\alpha^2 - 20\alpha + 30$.

Β. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 4\alpha > \alpha\beta^2 + 2\alpha^2 + 4\beta$.

Γ. Αν $-4 \leq \alpha \leq -3$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 16\alpha - 64 \leq \alpha^3 - 3\alpha^2 \leq 9\alpha - 27$.

4. Α. Αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta - \alpha - 3\beta + 3 > 0$

β) $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 > \alpha^2 + \beta^2 + 10$

Β. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$

5. Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $(1 - \alpha)(1 + \beta) < \beta - \alpha + 1$

β) $(2 + \alpha)(\beta - 1) > 2(\beta - 1) - \alpha$

γ) $\alpha(\alpha + \beta) + \beta^2 > (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$

δ) $(\alpha - \beta)^2 - \beta(2\beta - \alpha) < (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

6. Αν α, β είναι ετερόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta)(\beta + 1) < \alpha - \beta + 1$

β) $(\alpha - 2)(1 - \beta) > \alpha + 2(\beta - 1) - 1$

γ) $\alpha(\alpha - \beta) < (\alpha - \beta)^2 - \beta(\alpha + \beta)$

δ) $(\alpha + 2\beta)^2 > 9\alpha\beta$

7. Αν α, β είναι αρνητικοί αριθμοί με $\alpha < 3\beta$, να αποδείξετε ότι:

α) $9\beta^2 < 3\alpha\beta < \alpha^2$

β) $\frac{\alpha}{3} < \frac{2\alpha\beta}{\alpha + 3\beta} < \beta$



Εργασία 2η

(Απόδειξη ανισοτήτων , χωρίς την χρήση βοηθητικής σχέσης)

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $9\alpha^2 + \beta^2 \geq 6\alpha\beta$

β) $\alpha^2 + 16\beta^2 \geq 8\alpha\beta$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\beta$

δ) $36\alpha^2 + 12\alpha\beta \geq -\beta^2$

ε) $25\alpha^2 + \beta^2 \geq -10\alpha\beta$

στ) $5\alpha^2 + 5\beta^2 \geq (\alpha + 2\beta)^2$

2. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $x^2 + 2x + 4 > 0$

β) $4x - x^2 < 5$

γ) $9x^2 + 4x + 1 > 0$

δ) $x(3 - 4x) < 1$

ε) $4x^2 + 2xy + 9y^2 \geq 0$

στ) $xy \leq x^2 + y^2$

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

α) $\alpha(\alpha + 8\beta) \geq 4\beta(\alpha - \beta)$

β) $5(\alpha^2 + 5\beta^2) \geq \alpha(\alpha + 20\beta)$

γ) $(4\alpha + \beta)^2 \leq (4\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 4)$

δ) $(6\alpha - \beta)(6\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2 + 3\beta^2 \geq 14\alpha\beta - \alpha^2$

ε) $5\alpha^2 + 24\beta^2 - 26\alpha\beta \leq (3\alpha - 5\beta)^2$

στ) $\left(\frac{3\alpha + \beta}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}\alpha\beta$

4. Α. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

α) $10\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha + 5 > 0$

β) $14\alpha\beta < 5(\alpha^2 + 2\beta^2) + 1$

Β. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $4x^2 + 4xy + 3y^2 \geq 0$

β) $4(x^2 + y^2) \geq 6x(2y - x)$

γ) $5(x^2 + 2y^2) \geq 6x(2y - x)$

δ) $x(5x + y) \geq -5y^2$

5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $4(\alpha^2 + \beta^2) \geq 2\alpha\beta - (\alpha - \beta)^2$

β) $5(\alpha^2 + \beta^2) > 2(\alpha + 6\beta - 5)$

γ) $(4\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + 25y^2) \geq (2\alpha x + 5\beta y)^2$

δ) $(\alpha - 5\beta)^2 \leq 26[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

ε) $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha + \gamma)$

στ) $\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma^2 \geq \alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$



ΕΝΟΤΗΤΑ : «Διάταξη πραγματικών αριθμών - 2-»

Εργασία 1η

(Προσδιορισμός αριθμών μεταξύ των οποίων βρίσκεται μια παράσταση)

1. Αν $1 < x \leq 10$ να προσδιορίσετε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η κάθε παράσταση:

α) $3x$

β) $10 - x$

γ) $5x - 3$

δ) $x^2 - 1$

2. Αν $3 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 6$, να προσδιορίσετε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η κάθε παράσταση:

α) $x + y$

β) $2x - y$

γ) xy

δ) $x^2 + y^2$

3. Αν $-10 \leq x \leq -5$ και $2 \leq y \leq 4$, να προσδιορίσετε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η κάθε παράσταση:

α) $x + 5y$

β) $2x - 5y$

γ) $y^2 - 2x$

δ) xy

4. Αν $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $5 < 3x + y < 15$

β) $-9 < 3x - 4y < 4$

γ) $5 < x^2 + y^2 < 25$

δ) $1 < \frac{3x}{y} < 6$

5. Αν $-2 < x < 2$ και $-3 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $-12 < 3x + 2y < 12$

β) $-12 < 3x - 2y < 12$

γ) $0 < x^2 + y^2 < 13$

δ) $\frac{2}{5} < \frac{1}{x+3} + \frac{2}{y+7} < \frac{3}{2}$

6. Αν $-1 \leq x \leq 3$ και $-3 < y \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $-6 < 3x + y \leq 10$

β) $-8 \leq x - 3y - 4 < 8$

γ) $0 \leq x^2 + y^2 < 18$

δ) $\frac{1}{10} < \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} \leq 10$



Εργασία 2η

(Σύγκριση αριθμών)

1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

α) $4\alpha^2 + 9\beta^2$ και $12\alpha\beta$

β) $\alpha(\alpha + \beta) - \beta^2$ και $\beta(3\alpha - 2\beta)$

γ) $(\alpha^2 + 4\beta^2)(x^2 + 9y^2)$ και $(\alpha x + 6\beta y)^2$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 + 16 + 8\alpha$ και $2\beta(\alpha + 4)$

2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

α) $\frac{(4\alpha - \beta)^2}{4}$ και $(\alpha - \beta)^2 - 2\beta^2$

β) $\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2$ και $4\beta(\alpha - 3\gamma) + 6(\alpha\gamma - 1)$

3. Αν $\alpha < 5$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $3\alpha + 1$ και $2(\alpha + 3)$

β) $\alpha(\alpha^2 + 75)$ και $5(3\alpha^2 + 25)$

4. Αν $\alpha < 3$ και $\beta > 2$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\alpha\beta + 6$ και $2\alpha + 3\beta$

β) $\alpha\beta(\alpha - 1)$ και $2\alpha^2 - 3\beta$

5. Αν $\alpha < \beta < 5$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\alpha + \beta$ και 2β

β) 3α και $\alpha + 2\beta$

γ) $5 - \alpha$ και $\beta - 5$

6. Αν $\alpha < 0 < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}$ και $\alpha - \beta$

β) $\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ και $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}$

7. Να συγκρίνετε τους αριθμούς :

α) 243^{40} και 16^{50}

β) 64^{337} και 125^{674}

γ) 3^{27} και $2^{28} + 2^{25}$

8. Αν $\alpha > 0$ να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$\frac{\alpha+2}{\alpha+1}, \quad \frac{\alpha+3}{\alpha+4}, \quad \frac{\alpha+2}{\alpha+3}, \quad \frac{\alpha+6}{\alpha+5}$$



ΕΝΟΤΗΤΑ : «Διάταξη πραγματικών αριθμών - 3-»

Εργασία 1η

(Η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 = 0$)

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

β) $x^2 + y^2 + 10 = 6x + 2y$

γ) $2x^2 + 2y^2 + 1 = 2(x+y)$

δ) $2x^2 + y^2 + 4x + 4 = 2xy$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει:

α) $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = 2(3\alpha + 4\beta)$

β) $2\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2\alpha\beta + 1 = 0$

3. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύει:

α) $x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 2 \cdot (3x - y + 2z)$

β) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 8 = 2 \cdot (2x - 2y - yz)$

4. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίθετοι ενώ οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, όταν ισχύει:

$$x^2 + y^2 + \alpha^2\beta^2 + 1 = 2(\alpha\beta - xy)$$

5. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \leq 2 \cdot (2\alpha - \beta)$

β) $\alpha^2 + 5\beta^2 + 25 \leq 2\beta(\alpha + 10)$

Εργασία 2η

(γενικές ασκήσεις)

1. α. Αν $x > 1$ τότε να αποδείξετε ότι: i) $x^2 > x$ ii) $x^3 + x > x^2 + 1$

β. Αν $x > 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $x^3 > 2x^2 - x + 2$

γ. Αν $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + 2\alpha > 2\beta + \alpha\beta$.

δ. Αν $x > y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha = x^3 - y^3$ και $\beta = (x - y)^3$.



- 2. α.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, ρ αν δίνεται ότι $\kappa^2 + \rho^2 = 4\rho - 4$.
- β.** Αν $2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.
- γ.** Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογώνιου δίνεται ότι: $8, 3 \leq \alpha \leq 8, 5$ και $5, 7 \leq \beta \leq 5, 8$.
Να αποδείξετε ότι:
- i)** Η περίμετρός του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 28 και 28, 6.
ii) Το εμβαδόν του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 47, 31 και 49, 3.
- 3.** Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο έχει περίμετρο $20m$.
Αν $AB = \Gamma\Delta = x \text{ m}$ και συμβολίσουμε με $E(x)$ το εμβαδόν του, τότε να αποδείξετε ότι:
- i)** $A\Delta = B\Gamma = 10 - x$ **ii)** $0 < x < 10$
iii) $E(x) = -x^2 + 10x$ **iv)** $E(x) \leq 25$
- v)** Ένα ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο $20m$ έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν όταν αυτό γίνει τετράγωνο.
- 4. α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \frac{\nu}{\nu+1}$.
- β)** Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{1001}$.
- 5. α.** Να αποδείξετε ότι: $3(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- β.** Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;
- γ.** Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:
- i)** $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ **ii)** $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$ **iii)** $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$ **iv)** $\alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{8}$
- Πότε ισχύει οι ισότητες;



ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ »

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = 3(x^2 + 2)$ και $B = 2(x^2 + 2x)$.
2. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha - 2$ και $2\beta + 3$ είναι ομόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς
 $A = 4\beta - 3\alpha$ και $B = 2\alpha\beta - 6$.
3. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha^2 - 3$ και $5\beta - 4$ είναι ετερόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς
 $A = 5\alpha^2\beta + 12$ και $B = 4\alpha^2 + 15\beta$.
4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 - i) 8^{50} και 16^{37}
 - ii) 25^{100} και 125^{67} .
 - iii) 2^{700} και 5^{300}
 - iv) 5^{800} και 3^{1200} .
5. Να αποδείξετε ότι:
 - i) $\alpha^2 + 49 \geq 14\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
 - ii) $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
6. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \geq \frac{4}{\alpha^2 + \beta^2}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.
7. Αν α, β είναι δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:
 - i) $\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4$
 - ii) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 8$.
8. Να αποδείξετε τις ανισότητες:
 - i) $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2\alpha + 4\beta$
 - ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2(\alpha + 2\beta + 3\gamma - 7)$.
9. Να αποδείξετε τις ανισότητες:
 - i) $\alpha^2 + 2\alpha + 2 > 0$
 - ii) $\alpha^2 + 10\alpha > -26$
 - iii) $\alpha^2 + \beta^2 + 3 > 2\alpha + 2\beta$.
10. Να αποδείξετε τις ανισότητες: i) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} \geq \frac{(x+y)^2}{8}$ ii) $x^4 + y^4 \geq 2xy(x^2 + y^2 - xy)$.
11. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει η σχέση $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$.



12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 0$

ii) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.

13. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x^2 + 2y^2 + 1$ και $B = 2y(1-x)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $A - B = (y-1)^2 + (x+y)^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $A \geq B$.

iii) Αν $A = B$, να βρείτε τις τιμές των x και y .

14. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - \beta - 1)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

15. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$

ii) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$.

16. Να αποδείξετε τις ανισότητες: i) $2x^2 + 1 > 2x$ ii) $x^4 - x^2 + 4x + 5 > 0$.

17. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $3\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + 8 \geq 4(\alpha + \beta)$.

18. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις

$$1 \leq x < 3 \quad \text{και} \quad 2 \leq y < 4.$$

να αποδείξετε ότι: i) $-7 < 5x - 3y < 9$

ii) $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$.

19. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις $5 < x < 7$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

i) $11 < x + 2y < 17$ ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{8}{15}$ iii) $0 < x - y < 4$ iv) $x^2 - y^2 < 40$.

20. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε $\alpha + \beta > 4$ και $\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\alpha > 2$ και $\beta > 2$.

21. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση: $x^3 + x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $x > 0$

ii) $x < 1$.

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

ii) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.



23. Να αποδείξετε ότι: **i)** $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ii) αν $x + y = 1$, τότε $4xy \leq 1$.

24. Έστω a και β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $a + \beta = 1$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \geq 4$.

25. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι: $a\beta \leq \frac{1}{4}$.

26. Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a\beta = 1$, να αποδείξετε ότι: $a + \beta \geq 2$.

27. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $0 < a < 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 2$.

28. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει η σχέση $a > 1$, να αποδείξετε ότι: $a^3 + 3a^2 - 4 > 0$.

29. Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β ισχύει η σχέση $a > \beta$, να αποδείξετε ότι: $a^3 + \frac{1}{\beta} > \beta^3 + \frac{1}{a}$.

30. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $a > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι: $a + \beta^2 < \beta + a\beta$.

31. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $\beta > a > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a-1}{\beta-1} < \frac{\beta}{a} < \frac{\beta-1}{a-1}.$$

32. Αν a, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι: $\frac{a}{\beta^2} + \frac{\beta}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}$.

33. Να αποδείξετε ότι $(x^2 + 1)^2 > 2x^3 + 2x$ για κάθε $x \neq 1$.

34. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει η σχέση $a > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{a-1}{a+1} < \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

35. Αν a, β και γ είναι τρεις θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\frac{a^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a + \beta + \gamma} \geq \frac{a + \beta + \gamma}{3}$.

36. Αν a, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\textbf{i)} \quad \frac{1}{a^4 + \beta^2} \leq \frac{1}{2a^2\beta} \qquad \textbf{ii)} \quad \frac{a}{a^4 + \beta^2} + \frac{\beta}{\beta^4 + a^2} \leq \frac{1}{a\beta}.$$



37. Αν $x \in [-2, 3]$, να αποδείξετε ότι: i) $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$ ii) $-1 \leq 2 - x \leq 4$.

38. Αν $x \in (-1, 5)$, να αποδείξετε ότι: i) $1 < 4x + 5 < 25$ ii) $(x + 1)^2 < 36$.

39. Αν $\alpha \in (2, 5)$ και $\beta \in (4, 7)$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^3 + \beta^2 > 24$ ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{12}{35}$ iii) $\alpha^6 - \beta^2 > 15$ iv) $\alpha\beta + 20 < 4\alpha + 5\beta$.

40. Αν $x, y \in [2, 3]$, να αποδείξετε ότι: i) $(2x - 3y)(3x - 2y) \leq 0$ ii) $6(x^2 + y^2) \leq 13xy$.

41. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις $x \in (-2, 4)$ και $y \in (3, 6)$, να αποδείξετε ότι:

i) $(x + 2)(y - 6) < 0$ ii) $(x - 4)(y - 3) < 0$
iii) $9x + 2y > 2xy$ iv) $(x + 2)(y - 3) < 18$.

42. Δίνεται η παράσταση: $A = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 10$.

Να αποδείξετε ότι: i) $A = (x - 3)^2 + (2y + 1)^2$

ii) αν $A = 1$, τότε $x \in [2, 4]$ και $y \in [-1, 0]$.

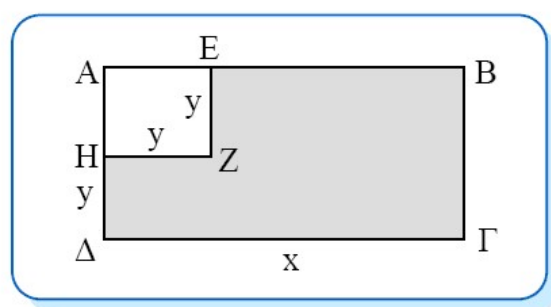
43. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $xy = 6$, $x > 2$ και $y > 2$.

Να αποδείξετε ότι: i) $(x - 2)(x - 3) < 0$ ii) $x + y < 5$.

44. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $x, 2y$. Αφαιρούμε το τετράγωνο ΑΕΖΗ με πλευρά y .

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος ΒΓΔΗΖΕ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $E = 2xy - y^2$.

ii) Αν ισχύουν οι σχέσεις $3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να αποδείξετε ότι $2 < E < 19$.



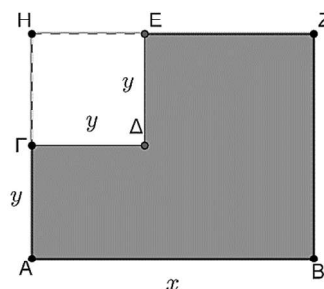


ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ - Τ.Θ.»

1261. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



1287. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1298. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

1314. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha - 2\beta$ β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

1317. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1324. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: α) $y - x$ β) $x^2 + y^2$

1352. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

1368. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις: α) $x + y$ β) $2x - 3y$ γ) $\frac{x}{y}$

1373. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \quad \beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{4}{\beta} \right) \geq 16$$



1353. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$, β) $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$

12922. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $A = (\alpha + 2)^2 + 1$

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $A + B = 0$;

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha + 2\beta$ και β) $\alpha - \beta$

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

14820. α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες. i) $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ και ii) $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι: $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \geq \frac{9}{16}$

γ) Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{(x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)}{x^2 - 1}$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

ii. Με τη βοήθεια του β ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$