



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού – ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ »

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$ ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι: α) $-3 < x < -1$ β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 5

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι: $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$ β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$

ΘΕΜΑ 8

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$.



ΘΕΜΑ 9

α) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$

β) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|a| + \left| \frac{1}{a} \right| \geq 2$

ΘΕΜΑ 10

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$ β) $0 < A < 4$

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. i) $|x+2|$ ii) $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

ΘΕΜΑ 13

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σ

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 14

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta) > 0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha-1| + |1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά

ΘΕΜΑ 15

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: • $|\alpha-2| < 1$ • $|\beta-3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$ β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.