ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανισώσεις 1ου βαθμού ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1243

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

ΘΕΜΑ 1248

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

ΘΕΜΑ 1252

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

ΘΕΜΑ 1253

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$.

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$.

ΘΕΜΑ 1260

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$

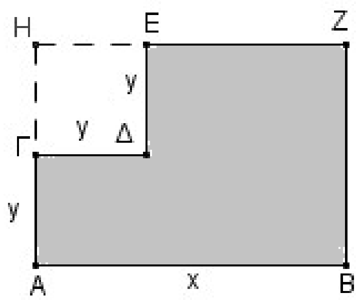
β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 1261

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



ΘΕΜΑ 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

ΘΕΜΑ 1278

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \le x \le 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1284

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \ge 3$.

β) Αν $\alpha \ge -1$, να γράψετε την παράσταση $A = \big||\alpha+4| - 3\big|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

ΘΕΜΑ 1330

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3| \le 5$ **ii)** $|2x-3| \ge 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

ΘΕΜΑ 1355

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

ΘΕΜΑ 1357

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

ΘΕΜΑ 1365

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5| \ge 3$.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 1367

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1374

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και **ii)** $|1-2x|\geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

ΘΕΜΑ 1376

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

ΘΕΜΑ 1378

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$

ΘΕΜΑ 1379

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$

ΘΕΜΑ 1383

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1416

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$.

β) Έστω $\lambda\neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

ΘΕΜΑ 1422

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις **Π1** και **Π2**:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^{\circ}C\right)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ $\left({}^{\circ}F\right)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^{\circ}C\right)$ σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^{\circ}K\right)$, προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου $\left({}^{\circ}C\right)$ το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^{\circ}K\right)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ $\left({}^{\circ}F\right)$ είναι η: $K=\frac{F-32}{1,8}+273$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ${}^{\circ}K$ μέχρι 283 ${}^{\circ}K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ${}^{\circ}F$.

ΘΕΜΑ 1423

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα (–2,4).

ΘΕΜΑ 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$

ΘΕΜΑ 1455

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές τουυ λ ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$.

ΘΕΜΑ 1472

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3| \leq 5$.

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$.

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3| \leq 5$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3| \leq 5$.

ΘΕΜΑ 1521

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

2 . Ανισώσεις 2ου βαθμού - ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1271

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

ΘΕΜΑ 1273

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1277

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11-24$

ii) Να βρείτε τις τιμές του x∈(3,7),για τις οποίες ισχύει $A=6$

ΘΕΜΑ 1279

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\leq 0$

β) Αν α,β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 1291

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1300

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = \left|x^2 + 4x + 5\right| - \left|x^2 + 4x + 4\right|$

ΘΕΜΑ 1306

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1350

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \le 3$ και $2x^2 - x - 1 \ge 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

ΘΕΜΑ 1356

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

ΘΕΜΑ 1363

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|x+1|}{3} - \dfrac{|x+1| + 4}{5} = \dfrac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \le 0$

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1391

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1396

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ) Αν $\left|\lambda^2-4\lambda-5\right|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

ΘΕΜΑ 1397

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0<\lambda\neq1$ και x_1,x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ,μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$

ΘΕΜΑ 1402

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$

ΘΕΜΑ 1409

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$

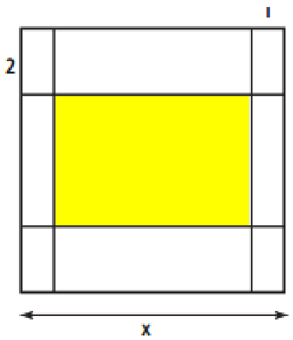
α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175\text{m}$;

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

ΘΕΜΑ 1420

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5\leq x\leq10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=(x-2)(x-4)$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2.

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2.

ΘΕΜΑ 1424

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

ΘΕΜΑ 1425

Δίνονται οι ανισώσεις: $2\leq|x|\leq 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

ΘΕΜΑ 1426

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\leq 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$

ΘΕΜΑ 1432

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ.

- **i)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
- **ii)** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

ΘΕΜΑ 1436

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

- **i)** Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).
- **ii)** Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$

ΘΕΜΑ 1438

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\left(\lambda-\lambda^2\right)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ΘΕΜΑ 1441

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.
β) Για $\alpha=1$,
  i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$
  ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $\left|f(x)-g(x)\right|=f(x)-g(x)$

ΘΕΜΑ 1442

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.
  i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).
  ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$

ΘΕΜΑ 1450

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.
β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,
  i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$.
  ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

ΘΕΜΑ 1458

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+\left(\lambda-\lambda^2\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;
γ) Αν $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1<\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_2$.

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$, $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, $f(x_2+1)$

ΘΕΜΑ 1462

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma=2\alpha$ και $\beta=-3\alpha$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1,2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha<0$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$.

ΘΕΜΑ 1465

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$ με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α,β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1473

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

ΘΕΜΑ 1474

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\leq\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

ΘΕΜΑ 1480

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

ΘΕΜΑ 1481

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) **i)** Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$;

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

ΘΕΜΑ 1483

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β) Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1484

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$,η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\Lambda}(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{X}(t)=600+40t$ μέτρα.

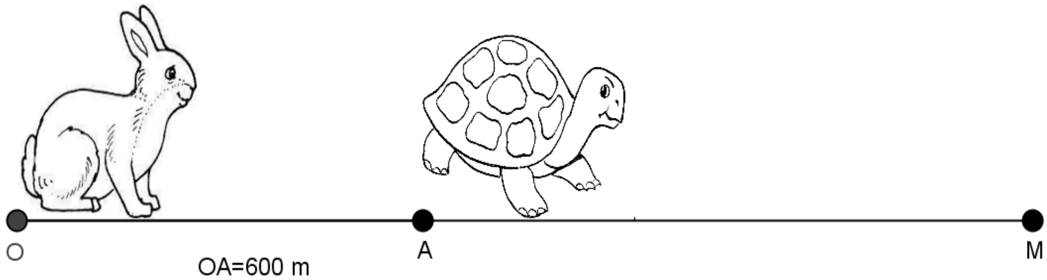
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα;

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση;

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα; (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 1486

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:
  i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.
  ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1487

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$
  ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$
β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.
  ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$

ΘΕΜΑ 1492

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0,\ \text{με } \lambda\in(0,4)$$

α) Να βρείτε:
  i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.
  ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.
β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$.
γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

ΘΕΜΑ 1493

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0,\ \text{με } \lambda\in(0,2)$$

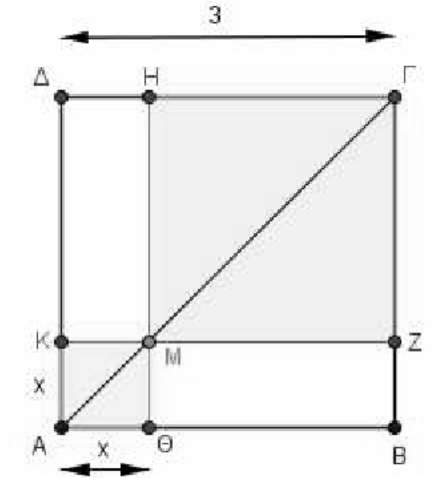
α) Να βρείτε:
  i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.
  ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.
β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.
γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

ΘΕΜΑ 1494

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$.
β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1497

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0,3)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0,3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1511

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$.

ΘΕΜΑ 1512

Δίνεται η ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

ΘΕΜΑ 1513

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

ΘΕΜΑ 1517

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$.(1)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ,λ.

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 1518

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$.

ΘΕΜΑ 1520

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

γ) Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha+1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

ΘΕΜΑ 1522

α) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.