



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ»

1. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

α) $x^2 - 5x + 6$

β) $x^2 - x + 2$

γ) $2x^2 - 5x + 2$

δ) $-3x^2 - 8x + 3$

ε) $x^2 - 4x + 4$

στ) $3x^2 - 5x + 2$

Απαντήσεις : α) $(x-3)(x-2)$ β) αδύνατη γ) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ δ) $-3(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)$ ε) $(x-2)^2$ στ) $3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$

2. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται το τριώνυμο : $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ

β) Για $\lambda = 3$ να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

Απαντήσεις : β) $2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

3. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται το τριώνυμο : $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

Απαντήσεις :

β) $-(x - \sqrt{3})(x + 1)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

α) $-x^2 + (\sqrt{5} - 1)x + \sqrt{5}$

β) $-3x^2 + (3\sqrt{3} + 1)x - \sqrt{3}$

γ) $x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})x - \sqrt{10}$

δ) $4x^2 - (2\sqrt{2} + 2)x + \sqrt{2}$

Απαντήσεις : α) $-(x-1)(x-\sqrt{5})$ β) $-(3x-1)(x-\sqrt{3})$ γ) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{2})$ δ) $(2x-1)(2x-\sqrt{2})$

5. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

α) $x^4 - 13x^2 + 36$

β) $x^2 + |x| - 6$

γ) $9x^5 - 13x^3 + 4x$

δ) $x^2 + 5|x| - 6$

Απαντήσεις : α) $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$ β) $(|x|-2)(|x|+3)$ γ) $x(9x^2-4)(x+1)(x-1)$ δ) $(|x|-1)(|x|+6)$

6. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

α) $x(x^2 - 1) - 6x + 6$

β) $x(x^2 - 6x + 5) - 6x + 6$

γ) $x(x^2 - 4x + 4) - 3x + 6$

Απαντήσεις : α) $(x-1)(x-2)(x+3)$ β) $(x-1)(x+2)(x-3)$ γ) $(x-2)(x+1)(x-3)$



7. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

- α) $3(x^2 - 3)^2 - 2(x^2 - 3) - 1$ β) $(x^2 - 5)^2 - 3(x^2 - 5) - 4$
 γ) $(3x^2 + 4x)^2 - 3(3x^2 + 4x) - 4$ δ) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$

Απαντήσεις :

$$\alpha) (x-2)(x+2)(3x^2-8) \quad \beta) (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \quad \gamma) (x+1)(3x+1)(x+2)(3x-2) \quad \delta) (x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

- α) $\frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 9}$ β) $\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ γ) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 20}$ δ) $\frac{3x^2 + 7x - 6}{-x^2 - x + 6}$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \frac{-(x-2)}{x+3} \quad \beta) \frac{2x-1}{x+1} \quad \gamma) \frac{x-3}{x-5} \quad \delta) \frac{3x-2}{-x+2}$$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

- α) $\frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{x^3 - x^2 - 2x}$ β) $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 - x - 2}$ γ) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}$ δ) $\frac{4x^4 - 25x^2 + 36}{2x^2 - x - 6}$

Απαντήσεις :

$$\alpha) \frac{-x+3}{x-2} \quad \beta) \frac{(x+2)(x^2+2)}{x+1} \quad \gamma) (x+3)(x+1) \quad \delta) (2x-3)(x+2)$$

10. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται η παράσταση : $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $2x^2 - 3x - 2$
 β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
 γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K

Απαντήσεις :

$$\alpha) (2x+1)(x-2) \quad \beta) x \neq \frac{1}{2} \text{ και } x \neq 2 \quad \gamma) K = \frac{x-2}{2x+1}$$

11. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $3x^2 - 2x - 1$
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση : $A(x) = \frac{x-1}{3x^2 - 2x - 1}$
 και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)| = 1$

Απαντήσεις :

$$\alpha) (3x+1)(x-1) \quad \beta) x \neq -\frac{1}{3} \text{ και } x \neq 1 \quad A(x) = \frac{1}{3x+1} \quad \gamma) x = 0 \text{ ή } x = -\frac{2}{3}$$



12. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $x^2 + 2x - 8 > 0$ β) $x^2 + 5x - 6 \leq 0$ γ) $-x^2 - 5x - 4 \leq 0$ δ) $-3x^2 + 3x + 6 > 0$

Απαντήσεις : α) $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ β) $x \in [-6, 1]$ γ) $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ δ) $x \in (-1, 2)$

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ β) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ γ) $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ δ) $x^2 + 2x + 1 > 0$

Απαντήσεις : α) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) αδύνατη γ) $x = 5$ δ) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

14. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $x^2 - 3x + 4 > 0$ β) $x^2 + 4x + 8 < 0$ γ) $-x^2 + 5x - 7 < 0$ δ) $x^2 - 6x + 10 \leq 0$

Απαντήσεις : α) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) αδύνατη γ) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δ) αδύνατη

15. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $x^2 - 3x < 0$ β) $-2x^2 - x > 0$ γ) $x^2 + 4x \geq 0$ δ) $\frac{x}{3} \geq -x^2$

Απαντήσεις : α) $x \in (0, 3)$ β) $x \in (-1, 0)$ γ) $x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ δ) $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [0, +\infty)$

16. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $-3x^2 - 27 < 0$ β) $4x^2 \leq 100$ γ) $\frac{x^2}{3} < 12$ δ) $\frac{x^2}{7} > 7$

Απαντήσεις : α) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ β) $x \in [-5, 5]$ γ) $x \in (-6, 6)$ δ) $x \in (-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$

17. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

α) $(x + 2)^2 \geq 2(x + 6)$ β) $4(x - 1) - (x - 2)(x + 2) \geq 0$ γ) $2(x - 1)(x + 1) - (x - 2)^2 < 9$

δ) $\frac{(x + 1)^2}{4} - x \geq 0$

Απαντήσεις :

α) $x \in (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ β) $x \in [0, 4]$ γ) $x \in (-3, -1)$ δ) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

18. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται το τριώνυμο : $2x^2 - 3x + 1$

α) Να βρείτε τις ρίζες του β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες : $2x^2 - 3x + 1 < 0$

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης : $2x^2 - 3x + 1 < 0$

Απαντήσεις : α) $x = \frac{1}{2}$ β) $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ γ) είναι λύσεις της ανίσωσης



19. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

- α) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ και $x^2 - x - 2 < 0$ β) $x^2 - 2x - 8 > 0$ και $-x^2 + 4x + 5 < 0$
 γ) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ και $2x^2 + 2x - 4 > 0$ δ) $-2x^2 - 6x - 4 \geq 0$ και $3x^2 - 12x + 9 < 0$

Απαντήσεις : $\alpha) x \in [1, 2] \beta) x \in [-4, 1] \gamma) x \in [1, 3] \delta) \text{αδύνατη}$

20. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Να λύσετε τις ανισώσεις : $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

- β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α)

Απαντήσεις : $\alpha) 1 \leq x \leq 4 \text{ και } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2} \beta) x \in [1, 4]$

21. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$

- β) Να λύσετε την ανίσωση : $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

- γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β)

Απαντήσεις : $\alpha) x = 10 \text{ ή } x = -12 \beta) x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \gamma) \text{είναι λύσεις της ανίσωσης}$

22. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

- β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$

Απαντήσεις : $\beta) B = 1$

23. (Τράπεζα θεμάτων)

- α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 10x + 21 < 0$

- β) Δίνεται η παράσταση : $A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$

Απαντήσεις :

$\alpha) x \in (3, 7) \beta) \text{ii) } x = 5 \text{ και } x = 6$

- i) Για $3 < x < 7$ να αποδείξετε ότι : $A = -x^2 + 11x - 24$

- ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$ για τις οποίες ισχύει $A = 6$

24. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x, -2) < 1$.

Να αποδείξετε ότι : α) $-3 < x < -1$ β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

25. Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $|x - 3| \geq 2|x + 1|$ β) $2|x + 2| < |x + 4|$

- γ) $|1 - x| - 3|x + 5| > 0$ δ) $2|x + 3| - |3x - 3| \leq 0$

Απαντήσεις : $\alpha) x \in [-5, \frac{1}{3}] \beta) x \in (-\frac{8}{3}, 0) \gamma) x \in (-8, -\frac{7}{2}) \delta) x \in (-\infty, -\frac{3}{5}] \cup [9, +\infty)$



26. Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $(3x - 1)^2 - |15x + 5| + 6 \leq 0$ β) $x^2 - 4x + 4 < 2|x - 4|$

γ) $|2x^2 - 5x| < 3$ **Απαντήσεις :** $\alpha) x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{4}{3}\right]$ $\beta) x \in (0, 4)$ $\gamma) x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

27. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 1)x + 2 - \lambda = 0$

έχει πραγματικές και άνισες ρίζες .

Απαντήσεις : $\lambda \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$

28. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 3)x + 2 - \lambda = 0$

δεν έχει πραγματικές ρίζες

Απαντήσεις : $\text{για κανένα } \lambda$

29. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$

έχει ετερόσημες ρίζες .

Απαντήσεις : $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$

30. **(Τράπεζα θεμάτων)**

α) Να λύσετε την ανίσωση : $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

β) Αν α και β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης , να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης **Απαντήσεις :** $\alpha) x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

31. **(Τράπεζα θεμάτων)**

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1)

Απαντήσεις : $\alpha) \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$ $\beta) \lambda \in [-2, -1]$

32. **(Τράπεζα θεμάτων)**

Δίνεται πραγματικός αριθμός α που ικανοποιεί τη σχέση : $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο : $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημο της .

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$

Απαντήσεις : $\alpha) \alpha \in (1, 3)$ $\beta) i) \Delta = (\alpha - 3)(\alpha - 1), \Delta < 0$



33. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνονται οι ανισώσεις : $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους

β) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να

αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση

Απαντήσεις : α) $0 < x < 4$ β) $x \in [2,3]$

34. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση : $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$ όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο

των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ

Απαντήσεις : α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ β) $\lambda = \frac{1}{2}$

35. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνεται η εξίσωση : $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τότε

i) να υπολογίσετε : $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση : $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

Απαντήσεις :

α) $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 3\lambda + 4 = 0$ β) $\lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$ γ) i) $S = 4(\lambda + 1)$ $P = 3\lambda + 4$

36. (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνονται οι ανισώσεις : $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$

α) Να λύσετε τις ανισώσεις β) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να

αποδείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

Απαντήσεις : α) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$