



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Εξισώσεις – Τράπεζα θεμάτων»

ΘΕΜΑ 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
- όταν $\alpha = 1$
 - όταν $\alpha = -3$
- β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

ΘΕΜΑ 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.
- γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1369

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.
- γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

ΘΕΜΑ 1238

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

ΘΕΜΑ 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.
- β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1250

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.
- β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

ΘΕΜΑ 1262

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

- α) Να δείξετε ότι: i) $A + B = 1/2$ ii) $A \cdot B = 1/20$
- β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.



ΘΕΜΑ 1264

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .
β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

ΘΕΜΑ 1269

Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 + 5x - 1$

- α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

- β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

- γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

ΘΕΜΑ 1280

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

ΘΕΜΑ 1285

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

- α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

ΘΕΜΑ 1288

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),
i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).
ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

ΘΕΜΑ 1290

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .
β) Για $\lambda = 1$ να λύσετε την εξίσωση (1)

ΘΕΜΑ 1312

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

- α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

**ΘΕΜΑ 1315**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

ΘΕΜΑ 1316

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

ΘΕΜΑ 1331

- α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)
β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2)
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

ΘΕΜΑ 1332

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$

ΘΕΜΑ 1334

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

- α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$.
β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .
γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

ΘΕΜΑ 1337

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

- α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$
β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

ΘΕΜΑ 1346

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.
β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2 - P - 2 \geq 0$ όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1)

**ΘΕΜΑ 1348**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
- β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

ΘΕΜΑ 1349

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$
- β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$.

ΘΕΜΑ 1359

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$
- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

4ο Θέμα**ΘΕΜΑ 1388**

Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού.
- β) Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.
- γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ΘΕΜΑ 1404

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

- α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση:
$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$$

ΘΕΜΑ 1406

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16$.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:
 - i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α
 - ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$

**ΘΕΜΑ 1407**

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A , t_B , t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $t_A < t_B$, $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3}$ και $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$.

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

ΘΕΜΑ 1412

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

ΘΕΜΑ 1418

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

ΘΕΜΑ 1431

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ .

**ΘΕΜΑ 1437**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.
γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

ΘΕΜΑ 1439

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:
i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

ΘΕΜΑ 1440

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.
β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.
ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$
iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 1445

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 1448

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

**ΘΕΜΑ 1451**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

ΘΕΜΑ 1452

- α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).
β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.
i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).
ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

ΘΕΜΑ 1456

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$$

ΘΕΜΑ 1459

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x$ (1)

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;
β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;
γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:
i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .
ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

ΘΕΜΑ 1460

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

- α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .
β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.
γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

**ΘΕΜΑ 1461**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.
γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:
i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί. ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$

ΘΕΜΑ 1463

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.
β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β .
γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$.

ΘΕΜΑ 1469

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.
β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1475

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

ΘΕΜΑ 1476

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .
i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$
ii) Να δείξετε ότι:
• $\rho \neq 0$ και
• ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$.

**ΘΕΜΑ 1477**

- α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
- β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε:
- i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$. ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 1478

- α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.
- i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm².
- ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.
- iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm² και διαγώνιο 8 cm.

ΘΕΜΑ 1482

- α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
- β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

ΘΕΜΑ 1485

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

ΘΕΜΑ 1491

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:
- i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
- $$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0.$$
- ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

ΘΕΜΑ 1500

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.
- β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
- ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
- ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντηση

**ΘΕΜΑ 1504**

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A ,

$$s_B, s_\Gamma \text{ και } s_\Delta \text{ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: } s_A < s_B, s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \text{ και } |s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



- α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ , που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1,4$ και $s_A \cdot s_B = 0,45$ τότε:
- Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B .
 - Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ .

ΘΕΜΑ 1508

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.
- β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.
- γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:
- Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.
 - Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .

ΘΕΜΑ 1509

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$.
- γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

ΘΕΜΑ 1516

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε i) $\rho \neq 0$ και ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).