



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Επανάληψη 1ου Τετράμηνου»

1. α. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι: $\left[(\alpha^{-7}\beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 (\beta^{-2}\alpha)^{-1} \beta^7} = 1$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\alpha^{-12}\beta^4(\alpha^2\beta^{-5})^3}{\alpha^{-5}(\alpha^{-3}\beta^5)^{-2}} \cdot \left[\frac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4} \right]^3$ για $\alpha = 1821$ και $\beta = \frac{1}{1821}$

2. α) Να αποδείξετε ότι $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$

β) Να υπολογίσετε τη παράσταση $\Pi = \left(1821 + \frac{1}{1821}\right)^2 - \left(1821 - \frac{1}{1821}\right)^2$.

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^3 - \alpha}$ β) $\frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 3\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 - 9}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9}$ γ) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{6x^2 - 3x} : \frac{12x^2 - 3}{2x}$ δ) $(x+y)^2 \cdot (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$

4. Α. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$. β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

Β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$ και $3\alpha + 2\beta - \gamma = 16$.

Γ. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2}{\beta^2\delta + \beta\delta^2} = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)^3$.

5. Α. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

Β. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με α και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Γ. α) Αν α, β ομόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$



6. **A.** Αν $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 1 \geq \alpha - \alpha^2$.

B. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

Γ. Αν $6 < x < 8$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $8 < x + y < 11$

β) $3 < x - y < 6$

γ) $18 < 2x + 3y < 25$

δ) $1 < \frac{x-2}{y+1} < 2$

7. **A.** α) Αν $x \leq 1$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x-3| - 2|x-1| + |2-x|$

β) Αν $x < 2$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x-2| - 2|3-x| + |x-4|$

B. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:

$1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$

β) $0 < A < 4$.

Γ. Αν $x \in [1, 2)$, να αποδείξετε ότι: $3 < |x| - |x-1| + 2|3-x| \leq 5$.

8. **A.** Να αποδείξετε ότι: α) $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ β) $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$

B. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$

Γ. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$. β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$

Δ. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4| + |x-14| = 18$.

Ε. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. i) $|x+2|$ ii) $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.



9. Α. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 2$.

Β. Να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+2} = 3$ β) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}+3} = 2$

Γ. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$ β) $\frac{1}{(5-\sqrt{23})^2} - \frac{1}{(5+\sqrt{23})^2} = 5\sqrt{23}$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\sqrt{75} + \sqrt{147}}{\sqrt{192} - \sqrt{108}} = 6$ β) $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = 6\sqrt[3]{2}$ γ) $\sqrt[3]{\frac{25^{14} + 125^7}{5^{25} + 125^6}} = 5$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{9}$ β) $\sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^9} = 4$ γ) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[4]{x^3} \quad x > 0$, δ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = 2\sqrt[12]{2^{11}}$

10. Α. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ γ) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ δ) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ε) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$ στ) $\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$

Β. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ β) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$ γ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3}$ β) $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{21} + 1$ γ) $\sqrt{8-2\sqrt{10}} > \sqrt{5} - \sqrt{2}$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{5}$ β) $\sqrt{6} + \sqrt{5} < \sqrt{30} + 1$ γ) $\sqrt{12+2\sqrt{30}} > \sqrt{6} + \sqrt{5}$

Ε. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

α) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ και $\sqrt{8} - \sqrt{3}$. β) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[4]{4}$ γ) $\sqrt[4]{10-\sqrt{15}}$ και $\sqrt{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}}$

11. Α. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $2x - 6 = 14 - 3x$ β) $3(x - 5) - 7x = 8 - 4(x + 1)$
 γ) $2(x + 3) - 5(x - 1) = 2 - 3(x - 3)$ δ) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{x-5}{4}$

Β. α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $(\lambda - 4) \cdot x = 2$ είναι αδύνατη;

β) Για ποια τιμή του λ και για ποια τιμή του μ η εξίσωση $(\lambda + 2) \cdot x = \mu + 1$ είναι αόριστη;

Γ. Για ποιες τιμές του κ οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση; α) $(\kappa + 3)x = 2$ β) $(\kappa^2 - 4)x = -6$



12. Α. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ :

$$\begin{array}{lll} \alpha) (\lambda+2)x = \lambda+2 & \beta) (\lambda+2)x = \lambda & \gamma) \lambda^2 \cdot (x-2) = 2(\lambda+2x) - \lambda^2 \\ \delta) \lambda(\lambda-3)(x-1) = 3\lambda-2x-4 & \epsilon) \frac{1}{6} \cdot (\lambda x + 2) = \frac{x+1}{2} - \frac{x+\lambda}{3} & \zeta) \frac{\lambda x - 2}{3} + \frac{3\lambda - x}{4} = \frac{\lambda}{2} \end{array}$$

Β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{array}{ll} \alpha) x^2(x+1) - x(x+1)^2 = 0 & \beta) (x^2-1)^2 - x^2(x^2-2x+1) = 0 \\ \gamma) (x-1)^2 + x^2 - 1 = 0 & \delta) (x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) + (x-1)^2 = 0 \end{array}$$

Γ. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\alpha) x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad \beta) x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \quad \gamma) 2x^3 - 2x = x^2 - 1$$

Δ. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\alpha) \frac{5}{x^2+x} - \frac{1}{x-x^2} = \frac{2x}{x^2-1} \quad \beta) \frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x} \quad \gamma) \frac{x+5}{x^2+x} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

13. Α. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{llll} \alpha) |x-1| = 5 & \beta) |x-6| = -3 & \gamma) |2x-3| = 3 & \delta) |2x-1| = |x-5| \\ \epsilon) 2(|x-2|-3) + |4-2x| = 10 & \sigma\tau) \frac{3|x|+1}{2} - |x| = \frac{6|x|-4}{7} & \zeta) \frac{|x|+5}{2} + 2 = \frac{2(|x|+7)+1}{10} - 9 \end{array}$$

Β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{2|x+3|-1}{3} - \frac{3-2|x+3|}{4} = \frac{5-|x+3|}{6} - \frac{|6+2x|-13}{12} & \beta) \frac{5-|x-2|}{4} - \frac{19-5|2-x|}{6} = \frac{|6-3x|-7}{2} - \frac{|2x-4|-1}{3} \\ \gamma) \frac{|x-3|-6}{10} - \frac{4-|3x-9|}{7} = \frac{|6-2x|+3}{5} - \frac{|9-3x|-4}{14} & \delta) \frac{|2x-6|-1}{3} - \frac{8-|9-3x|}{2} = \frac{|15-5x|-10}{4} \end{array}$$

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{llll} \alpha) ||x-1|-2| = 3 & \beta) ||2x-3|+1| = 4 & \gamma) |2x-10| = \sqrt{x^2-4x+4} & \delta) 3|x-1| = 2x-1 \\ \epsilon) |3x-2| = x+1 & \sigma\tau) 3|x-1| - |x+2| = x+3 & \zeta) |2-x| + 2|x+3| = 4 \end{array}$$

14. Α. Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) x^2 - 25 = 0$ $\beta) x^4 - 625 = 0$ $\gamma) x^{20} - 1 = 0$ $\delta) x^4 + 81 = 0$

Β. Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) x^3 - 27 = 0$ $\beta) x^5 + 243 = 0$ $\gamma) x^{1821} - 1 = 0$

Γ. Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) x^7 - 2x^3 = 0$ $\beta) x^5 - 9x^3 = 0$ $\gamma) x^8 + 125x^5 = 0$ $\delta) x^{12} - x^9 = 0$

Δ. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) (x+1)^4 - 81 = 0 & \beta) (x-2)^8 + 128 = 0 & \gamma) (2x-1)^5 + 243 = 0 \\ \delta) (3x+2)^7 - 128 = 0 & \epsilon) 81(x+2)^7 - (x+2)^4 = 0 & \sigma\tau) 16(x+4)^4 - 81 = 0 \end{array}$$