



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

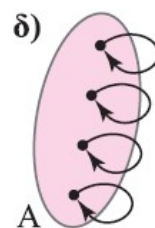
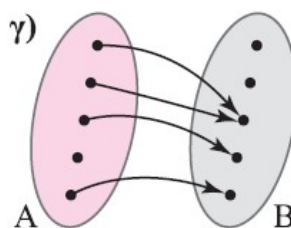
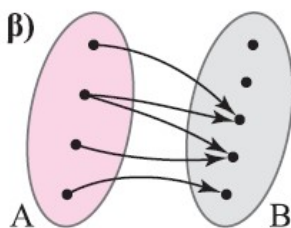
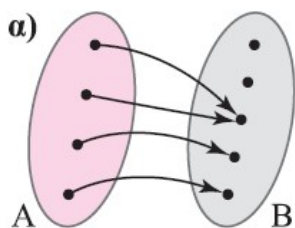
ΕΝΟΤΗΤΑ: «Συναρτήσεις»

Μάθημα 1ο

«Ορισμός – Πεδίο ορισμού – Συναρτησιακές σχέσεις»

ΟΜΑΔΑ Α

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω διαγράμματα αντιστοιχούν σε συναρτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 2

3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 2x + \alpha$, με $f(1) = -4$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β) Να βρείτε την τιμή του α .

γ) Να βρείτε το $f(4)$.

δ) Να εξετάσετε αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4\alpha x}{\alpha^2 x^2 + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τις τιμές του α έτσι, ώστε η τιμή της f στο 1 να είναι ίση με 2.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τις τιμές $f(-1)$ και $f(2)$,

γ) τα x για τα οποία $f(x) = 4$,

δ) τη συνάρτηση $g(x) = f(x-1) + f(x+1)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - |x - 2|$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(-5)$.

γ) Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) = 0$;

δ) Να λύσετε την άνισος $f(x) \leq 0$.



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$.

- α)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- β)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2 = 0$.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(x) = 4$.
- δ)** Να λύσετε την ανίσωση $f(3x) - f(x) > 2x$ για κάθε $x < 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 6$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β)** Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(-2)$.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- δ)** Να βρείτε τα x στα οποία η συνάρτηση f έχει τιμή **6**.
- ε)** Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 2 \\ \frac{16}{x^2}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β)** Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$, $f(-1)$ και $f(4)$.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{2x}{\sqrt{2-x}} \quad \beta) f(x) = \frac{2x}{x^4-81} + \frac{4x+1}{x^3-27} \quad \gamma) f(x) = \frac{2x-1}{3-|x|} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

11. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{4x+1}{|x|-4} \quad \beta) g(x) = \frac{3}{|2x-4|} \quad \gamma) f(x) = 3\sqrt{|x-1|}$$

$$\delta) g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \quad \epsilon) f(x) = 2\sqrt{|x|-2} \quad \sigma\tau) g(x) = \sqrt{3-|x|}$$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3\alpha, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x + \alpha^2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} 2x^2 - \beta x + 3\beta^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 7x^2 + 3\beta x + 2\beta^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{2}{x+1}$, β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$, γ) $f(x) = \frac{3}{4-|x|}$, δ) $f(x) = \frac{3}{x^2-7x+6}$,

ε) $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^3-4x^2+4x}$ σ) $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}$, ζ) $f(x) = \sqrt{4-|1-2x|}$,

η) $f(x) = 3 - \sqrt{-x^2+5x-6}$, θ) $f(x) = \frac{5}{|2-x|-1}$ ι) $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x-4}-1}$, κ) $f(x) = \frac{3x}{|2-3x|-|5x-3|}$,

λ) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}-2} - \sqrt{x^2-16}$

2. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

α) Να βρείτε τις τιμές: $f(2)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$

β) Να δείξετε ότι: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \neq 0$

γ) Να δείξετε ότι: $f(x) \neq 1$, για κάθε $x \neq 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+\kappa, & x < 1 \\ x^2+\kappa^2, & x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $f(-1)+f(0)+f(1)=-2$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x \leq 0 \\ \frac{2-\alpha}{x}, & x > 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $A = f(-1) + 2f(1)$ και $B = f(-2) + 4\alpha \cdot f(2)$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $A+B=-3$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3-1}{1-x}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq x^2-4$

δ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(\alpha) + f(\alpha+1) = 2 - \alpha^2$



6. Αν $f(x) = (x+1)^{2020}$, να δείξετε ότι:

α) $f(-1) = 0$, β) $f(f(-1)) = 1$, γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $A(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{A(x)} - 1 \right| = 1$

8. Να δείξετε ότι οι ισότητες α) $x^2 + f^2(x) = 4$ και β) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{f^2(x)}{3^2} = 1$

ορίζουν αντιστοιχίες $x \rightarrow f(x)$ που δεν είναι συναρτήσεις.

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - \alpha x + 1}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{\alpha}x + \beta} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{\beta}x + \alpha}$, $\alpha, \beta \geq 0$

Αν η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

11. Έστω μια συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x+1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της καθώς και το $f(-2)$

β) Αν $\alpha \cdot \beta = 1$, να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) = 1$

γ) Αν α και β θετικοί αριθμοί και $\alpha \cdot \beta \leq 1$, να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq 1$

12. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x) + 2f(-x) = 3x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι: $2f(x) + f(-x) = 3x^2$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $f(x) + f(1-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{3}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right)$$