



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $x^2 - 2x - 80 = 0$ β. $-x^2 + 16x - 48 = 0$ γ. $4x^2 + 12x + 9 = 0$ δ. $x^2 + 4x + 7 = 0$

ε. $x^2 - 4x\sqrt{3} + 9 = 0$ στ. $x^2 - 2x\sqrt{2} - 70 = 0$ ζ. $2x^2 - (\sqrt{5} + 4)x + 2\sqrt{5} = 0$.

2. Καθώς και οι εξισώσεις :

α. $x^2 - 9kx + 14k^2 = 0$ β. $x^2 - (2\alpha - \beta)x - 2\alpha\beta = 0$ γ. $x^2 - (2\alpha - 3\beta)x - 6\alpha\beta = 0$.

δ. $x^2 + \alpha^2(1 - 2x) = \beta^2(2x - 1)$ ε. $(x - \alpha)(x + \alpha) = \beta x - \alpha^2$ στ. $(x + \alpha)(x - \beta) + \alpha\beta = 2x^2 - \alpha\beta$

3. Να προσδιορισθεί ο λ ώστε η εξίσωση : $x^2 + x - 1 + 3\lambda = 0$ να έχει

α. Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες β. Μία διπλή ρίζα γ. Καμία ρίζα (πραγματική).

4. Αν η εξίσωση : $3\alpha x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 2\beta = 0$, $\alpha\beta \neq 0$ έχει διπλή ρίζα δείξτε ότι : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$.

5. Να προσδιορισθεί ο λ ώστε η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 + 12x + \lambda + 4 = 0$, να έχει μία διπλή ρίζα.

6. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $\mu x^2 - 2(\mu - 1)x + \mu - 4 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές ;

7. Να υπολογισθεί ο μ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν δύο ρίζες ίσες

α. $(\mu - 1)x^2 - 2(\mu + 1)x + \mu - 2 = 0$ β. $x^2 + 2(2 - \mu)x + (1 + \mu)^2 = 0$.

γ. $(\mu + 1)x^2 - (\mu + 4)x + \mu - 4 = 0$ δ. $2\mu x^2 + (5\mu + 2)x + (4\mu + 1) = 0$.

8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (2\alpha + 3)x + \alpha + 2 = 0$ έχει πάντα λύσεις πραγματικές και άνισες.

9. Αν $\lambda \in (0, 2) \cup (2, 3)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + (8 - 2\lambda)x - (8 - 3\lambda) = 0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες.

10. Αν $\mu \in (3, 4)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 + 4(2 - \mu)x + 3\mu - 8 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

11. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β αν η εξίσωση $2x^2 - 3(\alpha + 5)x + \beta - 2 = 0$ έχει μοναδική πραγματική λύση την $x = 0$.

12. Αν $\alpha > 2\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(x - \alpha) = \kappa(x - \beta)$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa > 0$.

13. Αν $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}^*$ και $|\alpha^2 - 4\kappa^2| + |\alpha - 2\kappa| = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$(\alpha x)^2 + (\alpha - \kappa)x - \kappa^2 = 0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες.

14. Αν η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες να αποδειχθεί ότι το ίδιο συμβαίνει και για την εξίσωση : $x^2 + \alpha x + \beta + 2\lambda x + \alpha\lambda = 0$.



15. Αν α και β ρητοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $(\alpha - \beta)^2 x^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha + \beta)^2 = 0$ έχει λύσεις ρητές.
16. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες πραγματικές τότε και η εξίσωση : $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma + \lambda(\alpha x + \beta) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές .
17. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $x^2 + \beta x + \alpha = 0$ έχει διπλή λύση , το ίδιο συμβαίνει και με την εξίσωση : $\left(1 - \alpha + \frac{\beta^2}{2}\right)x^2 + \beta(\alpha + 1)x + \alpha(\alpha - 1) + \frac{\beta^2}{2} = 0$.
18. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0$ έχει λύση την μονάδα. Ποια είναι η άλλη λύση της .
19. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις : $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ και $\alpha x^2 + 2\beta kx + k^2\gamma = 0$ έχουν το ίδιο είδος λύσεων $k \in \mathbb{R}^*$.
20. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β αν η εξίσωση : $3x^2 - (5\alpha + 2)x + \beta^2 - 16 = 0$ έχει διπλή λύση το μηδέν
21. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ρητοί αριθμοί με $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $(x - \alpha)(x - \beta) = \gamma\delta$ έχει ρητές λύσεις
22. Να βρεθεί ο $k \in \mathbb{R}$, αν η εξίσωση $x^2 - 2kx + k^2 = 0$ έχει ρίζα το 2 και στην συνέχεια να δείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι διπλή
23. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα το -2 .
α. Να βρείτε τις τιμές του λ .
β. Για κάθε τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση.
24. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$
α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα για κάθε τιμή του λ , και στη συνέχεια να βρείτε τη ρίζα αυτή.
β. Να βρείτε:
i. για ποιά τιμή του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι ίση με -4017 ,
ii. για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(-3, 5)$
25. Έστω η εξίσωση $x^2 - 2\Delta x + 15 = 0$ με Δ να είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης.
26. Να βρείτε το είδος των ριζών της $2x^2 - 8x + \kappa = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$
27. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες ίσες;
i) $2\kappa x^2 + (5\kappa + 2)x + 4\kappa + 1 = 0$ ii) $\kappa x^2 + (9 - 3\kappa)x - 10 + 2\kappa = 0$



ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 1 = 0$. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της χωρίς να λυθεί να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ii) $x_1^2 + x_2^2$ iii) $x_1^3 + x_2^3$ iv) $x_1^{-3} + x_2^{-3}$

29. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 - 2(\kappa + 1)x - \kappa + 1 = 0$ να ισχύει:

$$2x_1^2 + 3x_1^2x_2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2^2 = 0$$

30. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2(\kappa - 1)x + \kappa + 1 = 0$ να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$

31. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\kappa + 1)x + \kappa = 0$ να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $3x_1 + 2x_2 = 7$

32. Να βρεθούν οι εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $-3, \frac{1}{3}$ ii) $4 + 3\sqrt{3}, 4 - 3\sqrt{3}$ iii) $-\sqrt{2}, 2$ iv) $a - b, a + b$

33. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 3 = 0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη:

α) $x_1 + 2, x_2 + 2$ β) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$

34. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 10x - 6 = 0$ και έστω x_1, x_2 οι ρίζες της. Θέτουμε $A = x_1^{2004} + x_2^{2004}$, $B = x_1^{2005} + x_2^{2005}$, $\Gamma = x_1^{2006} + x_2^{2006}$. Να δείξετε ότι: $3\Gamma + 10B - 6A = 0$

35. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2)$ είναι ανεξάρτητη του λ

36. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 + 3x + 2\lambda + 6 = 0$ να έχει δύο ρίζες αντίστροφες.

37. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 3)x + 5\lambda = 0$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

38. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $3x^2 + (x + 1) \cdot \lambda - x \cdot \lambda^2 = 2(1 - 10x)$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

39. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1)

1) Να βρεθεί εξίσωση 2ου βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 - 1$ και $\rho_2 = x_2 - 1$.



2) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αντίθετες ; Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) στην περίπτωση αυτή;

3) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αντίστροφες ;

4) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης : $A = (x_1 - \lambda)^{2025} (x_2 - \lambda)^{2025} + 1$ είναι ανεξάρτητη του λ .

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 3)x + \lambda^2 - 1 = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

α) έχει: δύο ρίζες αντίστροφες β) έχει: δύο ρίζες αντίθετες

41. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda^2 - 1)x + \lambda = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες αντίθετες. Ποιες είναι οι ρίζες στην περίπτωση αυτή;

42. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x + \lambda + 2 = 0$ να διαφέρουν κατά 1. Στη συνέχεια να λύσετε τη δοσμένη εξίσωση.

43. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 8x + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $3x_1 - 4x_2 = 3$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης. Ποιες είναι οι ρίζες στην περίπτωση αυτή;

44. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1)

α. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του λ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να βρεθεί η τιμή του λ ώστε : $x_1 \cdot \left(1 - \frac{6x_2}{7}\right) + x_2 - \frac{6}{7} = 288$

45. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 8x - 1 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες και ετερόσημες

β. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$, $B = x_1^2 + x_2^2$ και $\Gamma = |x_1 - x_2|$

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3\beta x + 4\gamma = 0$ είναι κατά μία μονάδα μικρότερες από τις ρίζες της (1), να βρείτε τις τιμές των β και γ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

46. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $3x^2 - 5|x| - 2 = 0$ ii) $(3x + 2)^2 - |3x + 2| = 12$

47. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $x^4 - 13x + 36 = 0$ ii) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

48. Να λυθεί η εξίσωση $2x^4 - 4x^2 + 3(\lambda - 2) = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

49. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{5}{x^2 + x} = \frac{2x}{x^2 - 1}$ β) $\frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{x^3 - 1}$ γ) $1 - \frac{3 - 2x}{5 - x} = \frac{3}{3 - x} - \frac{x + 3}{x + 1}$

50. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $(x^2 + x + 2)^2 - 3(x^2 + x + 1) = 7$ β) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - 35\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0$