



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Γ ΟΜΑΔΑ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

A) $x^2 - 4\alpha x + 3\alpha^2 = 0$, $\alpha \neq 0$

B) $x^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2\beta^2 - 1 = 0$

Γ) $3x^2 - (\alpha - 9\beta)x - 3\alpha\beta = 0$

2. Βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

A) $x^2 + (\alpha + 2)x + \alpha = 0$

B) $\alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta = 0$

Γ) $x^2 - (\alpha^2 - \beta^2)x - \alpha^2\beta^2 = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$

3. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ αν η εξίσωση $x^2 - (\lambda^2 + 1)x + 2(\lambda + 1) = 0$, έχει λύση το 2

4. Βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x - |\alpha| = 0$ να είναι 2ου βαθμού και να έχει ρίζα το -1.

5. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + |\lambda|x - \lambda = 0$ να είναι 2^{ου} βαθμού και να έχει ρίζα το 1.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα.

7. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(2\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 1 = 0$ να έχει μία διπλή ρίζα η οποία και να βρεθεί.

8. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

A) Να έχει δυο ρίζες άνισες B) Να έχει μια ρίζα διπλή Γ) Να μην έχει καμιά πραγματική ρίζα.

9. Η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα 4.

A) Να βρείτε τις τιμές του λ .

B) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

10. A) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha + 1 = 0$, να έχει μοναδική ρίζα το 2.

B) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $x^2 - (\beta + 2)x + \alpha - 3 = 0$, να έχει μοναδική ρίζα το 3.

11. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - \lambda - 1 = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα.

B) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .

Γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\lambda \cdot (x_1 + x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 + 5$.

12. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 1 - \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα.

B) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2

ώστε να ισχύει: $\lambda \cdot (x_1 + x_2 + 2) = x_1 \cdot x_2 + 7$



13. Θεωρούμε την εξίσωση: $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Βρείτε το λ ώστε να έχει πραγματικές ρίζες και άνισες x_1, x_2 .

B) Βρείτε τα λ ώστε: $3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2 = -2$.

14. Θεωρώ την εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 2) \cdot x + \lambda - 5 = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 .

B) Βρείτε τα λ ώστε: $x_2 \cdot (3 - 2x_1) + 3 \cdot (x_1 - 1) = \lambda^2 + 11$.

15. Θεωρώ την εξίσωση: $\lambda \cdot x^2 - x - \lambda = 0$ όπου $\lambda \neq 0$.

A) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο πραγματικές άνισες και ετερόσημες ρίζες x_1, x_2 .

B) Βρείτε τα λ ώστε: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{\lambda}$.

Γ) Βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , ώστε να ισχύουν:

$$\rho_1 + \rho_2 = 7 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \quad \text{και} \quad 2(1 + \rho_2) + \rho_1(2 + \rho_2) = -5$$

16. Θεωρώ την εξίσωση: $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2 .

B) Να δείξετε ότι η παράσταση: $A = (x_1 - 2)^{2025} \cdot (x_2 - 2)^{2025}$ είναι ανεξάρτητη του λ .

Γ) Βρείτε τα λ ώστε: $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 64 - x_1 - x_2$.

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (P - \Delta) \cdot x + 6\Delta = 0$ (1), με Δ να είναι η διακρίνουσα και P το γινόμενο των ριζών της. Αν η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες, τότε:

A) Να βρείτε τις ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ της εξίσωσης (1).

Για τα παρακάτω θεωρήστε ότι $\Delta=1$:

B) Αν $x_1 < x < x_2$ τότε να λύσετε την εξίσωση: $|2\mu x - \mu x_1 + \mu x_2| = |x + 1|$ όταν $\mu \in \mathbb{R}$.

Γ) Έστω η εξίσωση: $\lambda(1 - x) \cdot (1 + x) - 2\Delta x = P^2 - 64$, (2)

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση (2) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να εξετάσετε αν η εξίσωση (2) μπορεί να έχει ρίζες άνισες και αντίστροφες.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $-\lambda x^4 - 2x^2 + \lambda - 2 = 0$, αν $\lambda > 2$.



17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες ίσες;

Av $\lambda \neq \frac{1}{2}$

Γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες αντίστροφες.

Δ) Av x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθεί το λ ώστε $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$

18. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, (1) με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

A) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$ τότε η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές που είναι αντίστροφες μεταξύ τους.

B) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\alpha = 2$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

19. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, (1) με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Av η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$ τότε:

A) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β ,

B) Να δείξετε ότι $\gamma < 4$,

Γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση: $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$, (2), να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (A) ερώτημα η εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

20. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda < 1$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

B) Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

Γ) Av για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

1. να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$

2. να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ

21. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 άνισες μεταξύ τους.

B) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 = 7 \cdot (x_1 \cdot x_2)^{2026}$

Γ) Για $\lambda = 1$, να υπολογισθεί η παράσταση: $\Sigma = x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2$.



22. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - 2x - \lambda = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 άνισες μεταξύ τους.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Γ) Να βρείτε την δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 \cdot x_2 - 3$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + 2$

23. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\alpha + 1)x + \beta + 2 = 0$, (1) με $\alpha \geq \beta + 2 > 0$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές.

B) Για ποιες τιμές των α, β η εξίσωση (1) έχει ρίζες ίσες;

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) δεν μπορεί να έχει ρίζες αντίθετες.

Δ) Για ποιες τιμές των α, β η εξίσωση (1) έχει ρίζες αντίστροφες;

E) Να βρείτε τα α και β για τα οποία: $x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot (2 + x_1 \cdot x_2) \leq 4 \cdot (\alpha + 2\beta)$.

24. Δίνεται ότι η εξίσωση: $x^2 - (\Delta + 6)x + S + 5 = 0$, (1), όπου Δ και S η διακρίνουσα και το άθροισμα των ριζών της, έχει δύο ρίζες άνισες.

A) Να δείξετε ότι $\Delta = 1$ και $S = 7$.

B) Να λύσετε την εξίσωση (1).

Γ) Να λύσετε την εξίσωση: $x + \frac{\Delta}{\alpha} = \alpha + \frac{\Delta}{x}$, με $\alpha \neq 0$.

Δ) Αν μια ρίζα της εξίσωσης: $x^4 - (S + 3) \cdot x^2 + \kappa = 0$ είναι το 1, να βρεθεί το κ και να λύσετε την εξίσωση.

E) Να βρείτε τους αριθμούς β και γ για τους οποίους η εξίσωση: $(\beta^2 + 3) \cdot x^2 - (3\beta^2 + 5) \cdot x + \gamma = 0$, έχει διπλή ρίζα το 1.

ΣΤ) Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda x^2 + (\lambda - \Delta) \cdot x - S + 3 = 0$.

Η) Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 - (\Delta + 6) \cdot x + S + 5)^2 = |x^2 - (\Delta + 6) \cdot x + S + 5|$.

25. Δίνεται ότι η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, (1) με ρίζες $x_1 = 4 - 2\sqrt{3}$ και $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

A) Να δείξετε ότι: $\beta = -2\gamma$, B) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 8x + 4 = 0$.

Γ) Να δείξετε ότι: $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 2$.

Εστω $\alpha = 1$

Δ) Να βρείτε την δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = x_1^3$ και $\rho_2 = x_2^3$.

E) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_2} = 2$

ΣΤ) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $4x^2 - 8x + 1 = 0$, έχει ρίζες $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$