



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ- ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ »

1. α) Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + x - 4 = 0$ β) Να λύσετε την ανίσωση $3 \cdot |x - 1| - 2 \leq |x - 1|$
 γ) Να βρείτε την κοινή λύση της εξίσωσης και της ανίσωσης
2. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $4x^2 + 3x - 1$ β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 3x(x + 1) \leq 1$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^4 + 1) = \frac{1 - 3x^2}{2} + 2$
3. Δίνετε η εξίσωση: $x^2 - 5x + \frac{|\lambda - 1|}{4} = 0$
 Να βρείτε τις τιμές του λ : α) ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
 β) ώστε να ισχύει : $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.
4. Δίνεται το τριώνυμο : $A(x) = -x^2 + \lambda x + 6\lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $A(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \neq 0$.
 β) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης συναρτήσει του λ .
 γ) Να βρείτε το λ ώστε $30 \cdot S + P = 0$.
 δ) Αν $\lambda = 5$ να λύσετε την ανίσωση : $A(x) \geq 144$.
5. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \mu x + \mu - 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 β) Αν $\mu \neq 2$ να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\mu - 1$ και 1
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης είναι μικρότερη του 1 .
 δ) Να λυθεί η ανίσωση: $x_1 + x_2 \geq 3 \cdot x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.
6. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες και να βρεθούν.
 γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $2x_1 + x_2 = 3\lambda^2$.
 δ) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $2x_1 + 4$ και $2x_2 + 4$.
7. α) Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x - 2 \geq 0$ β) Να λυθεί η ανίσωση: $(x - 1)^2 + |x - 1| - 2 \leq 0$
8. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1, x_2 .
 β) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης συναρτήσει του λ .
 γ) Να βρεθεί το λ ώστε : $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \leq -4$.
9. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β) Να βρεθεί το λ ώστε : $(x_1 + x_2)^2 - 18\lambda = 7(x_1 \cdot x_2)^{2024}$.
 γ) Για $\lambda = 1$ να υπολογισθεί η παράσταση: $A = x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 - 3x_1 + 4 - 3x_2$



10. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

α) Να λυθεί. β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

γ) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $A = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$. δ) Αν $A = 2x + 1$, να λυθεί η ανίσωση: $1 \leq |A| < 2$.

11. α) Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 7$.

β) Αν ισχύει: $d(2, x) < 7$, να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση: $A = -|x + 6| + |x^2 - 2x + 2| - 6$.

γ) Αν $A = x^2 - 3x - 10$, να λυθεί η ανίσωση: $A \leq 0$.

12. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - (3\lambda + 1)x + 2\lambda(\lambda + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\lambda - 1)^2$.

β) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = 2\lambda$ και $x_2 = \lambda + 1$.

γ) Αν $\lambda < 1$, να δείξετε ότι $x_1 < x_2$. δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $x_1 \cdot x_2 \leq x_1 + x_2$.

13. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. β) Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 .

γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $x_1^2 + x_2^2 < 5$.

14. Δίνεται το τριώνυμο $A(x) = (\lambda - 1)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για $\lambda = -2$ να λυθεί η εξίσωση: $A(x) = 0$.

β) Για $\lambda = -3$ να υπολογισθεί η παράσταση: $K = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $A(x) = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $A(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα; β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης συναρτήσει του λ και στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση: $S - P^2 + 8 \geq 0$.

16. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η A . β) Να δείξετε ότι: $A = |x| - 2$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση: $(A + 2)^2 - 4A < 5$.

17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να λυθεί η ανίσωση: $\left| \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 3 \right| > 1$.

γ) Αν $\lambda = -1$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης: $K = \left(\frac{2023}{2024} \right)^2 - 2 \left(\frac{2023}{2024} \right) - 8$.



18. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + \lambda x - 3 = 0$

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού λ
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $|x_1 - x_2| < \sqrt{15}$

19. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - x - \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες
 β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να δείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2) + 1$

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 7 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες
 β) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης και να δικαιολογήσετε ότι οι ρίζες είναι ετερόσημες

γ) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$

δ) Να δείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 = 23$

ε) Να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τα τετράγωνα της εξίσωσης

21. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 4\lambda x + (2\lambda^2 - \lambda + 4) = 0$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $x_1(x_2 - 1) + x_2(x_1 - 1) = 58$

γ) Αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt{\frac{2^{29} + \lambda^{16}}{\lambda^{12} + (2\lambda)^7}}$

δ) Αν για τον πραγματικό λ ισχύει $|\lambda - 4| = 4 - \lambda$ να δείξετε ότι η αρχική εξίσωση έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$, $\lambda \neq -2$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ συναρτήσει του λ

γ) Να βρείτε το λ αν ισχύει $\frac{|x_1 + x_2 + 3\lambda - 8| - 5}{5} + 3 = \frac{|x_1 \cdot x_2 + \lambda + 3| + 3}{2}$

23. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x - 1) = 2(2x - \lambda)$ (1)

α) Αν η (1) είναι ταυτότητα, να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)|x| + \lambda = 0$

β) Αν η (1) είναι αδύνατη, να λύσετε την ανίσωση $x(x - 2\lambda) + \lambda(x + 4) \leq 0$

γ) Αν η (1) έχει μοναδική λύση x_0 , να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $|x_0| = \frac{1}{2}$

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει:

- 1) πραγματικές ρίζες 2) αντίστροφες ρίζες

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 6$



25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda + 3) = 0$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες
 β) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης. Αν $P - S = 12$, να βρείτε το λ
 γ) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα

1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

2) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1^2 \cdot x_2$ και $x_2^2 \cdot x_1$

26. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\alpha + 2)x + \alpha = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ρ_1, ρ_2 για κάθε α
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + |\rho_2 - \rho_1| \cdot x + \frac{5\rho_1\rho_2}{4} = 0$ έχει μοναδική λύση
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει: $\rho_1^2 + \rho_2^2 > \rho_1\rho_2 + 6$

27. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x - 1 = 0$, $\lambda \neq -1$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \neq -1$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του λ :
 1) ώστε οι ρίζες να είναι ετερόσημες 2) ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 < x_1 \cdot x_2$

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 2)x + \lambda - 1 = 0$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης για τις οποίες ισχύει $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 6$ τότε:
 1) να αποδείξετε ότι $\lambda = 3$
 2) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A = x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1$ και $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
 3) Να λύσετε την ανίσωση $|x + A| \leq |x + B|$

29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

1) οι ρίζες είναι άνισες 2) οι ρίζες να είναι αντίστροφες 3) να ισχύει η σχέση $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$

30. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές
 β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα
 γ) Να γράψετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3 \cdot |S|}{2} - |P| < 4$

31. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda(x^2 + x + 1) = 3x^2$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες,

- β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + \left(\frac{3}{\lambda - 3}\right)^2$$

- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $\lambda(x^2 + x + 1) < 3x^2$ για κάθε πραγματικό x