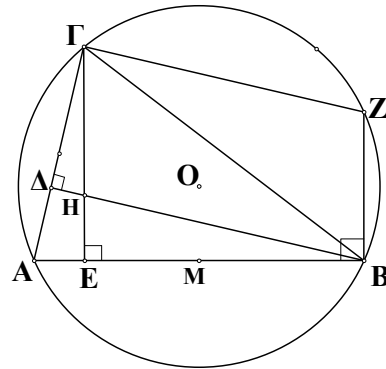


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Η μεσοκάθετη της πλευράς του AG τέμνει την προέκταση της βάσης του στο σημείο Δ . Προεκτείνουμε την ΔA κατά τμήμα $AE = B\Delta$. Να δείξετε ότι:
- α. το τρίγωνο ΔAG είναι ισοσκελές,
β. τα τρίγωνα $B\Delta A$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα.
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB < AD$. Στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ , παίρνουμε $\Gamma E = 3\Gamma\Delta$. Αν K, Λ είναι τα μέσα των AE και $B\Gamma$ να δείξετε ότι:
- α. $K\Lambda = AB$ και β. $ABK\Lambda$ παραλληλόγραμμο.
3. Δίνεται ο κύκλος (K, ρ) και σημείο του Λ . Με κέντρο το Λ και ακτίνα ρ γράφουμε κύκλο ονομάζουμε A το ένα από τα δύο σημεία που τέμνει τον (K, ρ) και φέρνουμε τις διαμέτρους AE και AZ στους δύο κύκλους.
- α. Τι είδος τριγώνου, ως προς τις πλευρές, είναι το AEZ ;
β. Να δείξετε ότι $E\Lambda = KZ$
4. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισοπλευρά ABE εσωτερικά και $B\Gamma Z$ εξωτερικά.
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$
β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,
γ. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta EZ}$
5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε κάθετη στην $B\Gamma$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την ευθεία AB στο Z .
- Α. Το σημείο Δ στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι :
- Α. Το περίκεντρο Β. Το έγκεντρο Γ. Το βαρύκεντρο Δ. Το ορθόκεντρο
- Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση
- Β. Να αποδείξετε ότι :
- α. το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές
β. $B\Delta \perp \Gamma Z$
6. Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Προεκτείνουμε την AG κατά $\Gamma K = \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:
- α. $\hat{B} = 60^\circ$ β. $AG = AB$ γ. το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο

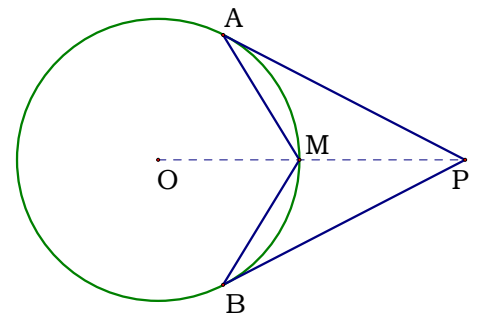
7. Στο διπλανό σχήμα είναι (O,R) ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ABΓ, κύκλος, BΔ, ΓΕ τα ύψη του ABΓ και BZ⊥AB. Να δείξετε ότι:

- η AZ διάμετρος του κύκλου
- το BHΓZ παραλληλόγραμμο,
- Το $OM = \frac{1}{2} GH$, M το μέσο της AB



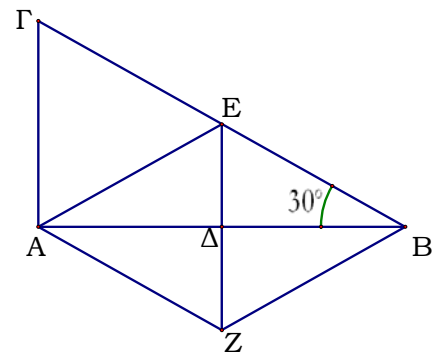
8. Από το εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,R) φέρνουμε εφαπτόμενες PA και PB. Αν M είναι το σημείο που η OP τέμνει τον κύκλο να αποδείξετε ότι

- AM = BM
- $\hat{M}AP = \hat{M}BP$



9. Σε τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) η διχοτόμος BK (K στην ΓΔ) της γωνίας B τέμνει την διάμεσο EZ (E στην ΑΔ) στο H. Να δείξετε ότι:

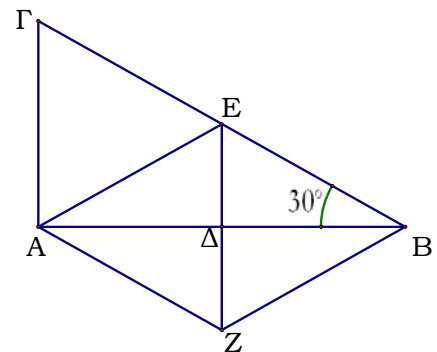
- τα τρίγωνα BΚΓ και BZH είναι ισοσκελή,
- BH ⊥ ΓH



10. Στο παρακάτω σχήμα είναι: ABΓ ορθογώνιο τρίγωνο

με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$, τα Δ και E είναι τα μέσα των BΓ και AB αντίστοιχα, ΔZ = EΔ. Να αποδείξετε ότι :

- $AE = EZ = \frac{B\Gamma}{2}$
- $EZ \parallel A\Gamma$
- AEBZ είναι ρόμβος

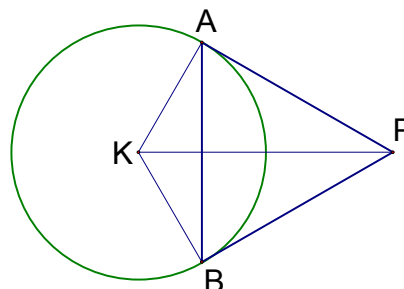


11. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και AM διάμεσος του. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι : α. BΔ//AΓ β. ΓΔ = AB

12. Έστω (K, ρ) κύκλος και σημείο P, στο επίπεδό του, τέτοιο ώστε $KP = 2\rho$. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB.

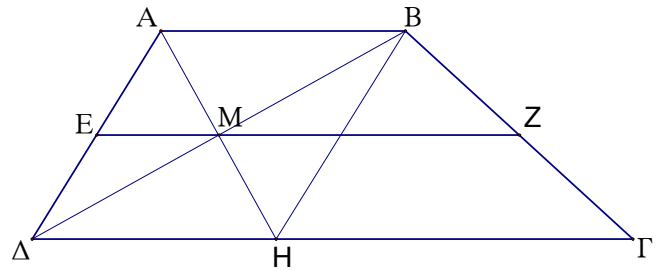
Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{APK} = 30^\circ$
- $\hat{AKB} = 120^\circ$
- το PAB είναι ισόπλευρο



13. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε την διάμεσο EZ . Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την διάμεσο στο M και διέρχεται από την κορυφή B και η AM τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο H . Να αποδείξετε ότι

- α. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές
- β. το σημείο M είναι μέσο του $B\Delta$ και το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ορθογώνιο
- γ. το τετράπλευρο $ABH\Delta$ είναι ρόμβος



14. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο και O το κέντρο του. Αν K, Λ είναι τα μέσα των ΔO και ΓO αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα KOA και ΛOB είναι ίσα
- β. Το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

15. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z, K, Λ τα μέσα των $B\Gamma, A\Delta, A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.

- α. Δείξτε ότι το τετράπλευρο $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Αν επιπλέον $AB = \Gamma\Delta$, να δείξετε ότι το $KE\Lambda Z$ είναι ρόμβος.

16. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και επίκεντρη γωνία $\angle AKB = 120^\circ$. Φέρουμε εφαπτομένη του κύκλου στο μέσο M του τόξου AB , η οποία τέμνει τις προεκτάσεις των KA και KB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- A. Το τρίγωνο $K\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- B. $A\Gamma = B\Delta = \rho$.

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και M το μέσον της $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι :

- A. Οι AM και BM είναι διχοτόμοι των γωνιών A και B του παραλληλογράμμου, αντίστοιχα.
- B. $\hat{AMB} = 90^\circ$.

18. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\chi'\chi$ η ευθεία της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Έστω $B\Delta \perp \chi'\chi$. Η προέκταση της $B\Delta$, προς το Δ , τέμνει την προέκταση της ΓA , προς το A , στο σημείο E . Αν M μέσον της $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

- A. $\Delta M \parallel A\Gamma$.
- B. $\Delta M = \frac{AB + A\Gamma}{2}$

19. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$, $AB = 3$ και $B\Gamma = 4$. Αν BK το ύψος του τραpezίου :

- A. Να αποδείξετε ότι $K\Gamma = 2$.
- B. Να υπολογίσετε την πλευρά $\Gamma\Delta$.
- Γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ του τραpezίου.

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την ΔA κατά τμήμα $AZ = \Delta A$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, τέμνει την AB στο E , να αποδείξετε ότι :

- A. Το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές.
- B. Το τρίγωνο ΔZE είναι ορθογώνιο.

21. Σε κύκλο (O, ρ) φέρνουμε χορδή $AB = \rho$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο M του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{AB}$. Αν Γ, Δ, E, Z είναι τα μέσα των OA, OB, MB, MA , αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
A. Η γωνία $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
B. Το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EZ$ είναι ρόμβος.
22. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BD < AB$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $\Gamma E = BD$ και από το E φέρνουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $B\Gamma$ στο Z .
A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.
B. Να αποδείξετε ότι η ΔE διχοτομεί την BZ .
23. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 45^\circ$ και $BD, \Gamma E$ τα 2 ύψη του. Αν M είναι το μέσον της $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι : **A.** Το τρίγωνο $EM\Delta$ είναι ισοσκελές. **B.** Η γωνία $\widehat{EM\Delta} = 90^\circ$.
24. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$, κέντρου O και $A\Gamma = 2B\Gamma$. Φέρνουμε κάθετη στην BD στο σημείο O η οποία τέμνει την ΔA στο E . Να αποδείξετε ότι ::
A. Το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο
B. Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
Γ. Το τετράπλευρο $AEBO$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
25. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB = \alpha, \Gamma\Delta = 3\alpha$ και E, Z τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα. Η EZ τέμνει τις διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ στα M και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
A. $EN = ZM = \frac{\alpha}{2}$. **B.** $MN = \alpha$ **Γ.** $ABMN$ είναι παραλληλόγραμμο.
26. Στην προέκταση της πλευράς ΓB ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $BD = B\Gamma$ και στην προέκταση της ΔA παίρνουμε τμήμα $AE = A\Delta$. Από το E φέρνουμε κάθετη στην ευθεία της $B\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι :
A. Η ΓA είναι μεσοκάθετη του ΔE .
B. Τα τμήματα $B\Gamma$ και ΓZ είναι ίσα
Γ. Το $E\Gamma // AB$.
27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ και BD διχοτόμος. Από το μέσον M της $A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη στη BD , που τέμνει τη $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο $AN\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο N .
28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω M μέσον του $B\Gamma$, E μέσον του BM , Z μέσον του AB και H μέσον του AM . Προεκτείνουμε το ZE κατά ίσο τμήμα $E\kappa$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο $ZB\kappa M$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο $ZBMH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
29. Δίνονται τέσσερα συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ τέτοια ώστε: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $B\Gamma EZ$ με $\Gamma E = 2 \cdot B\Gamma$.
1) Να αποδείξετε ότι η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma EZ}$ και η ΔZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BZE}$
2) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp AE$.