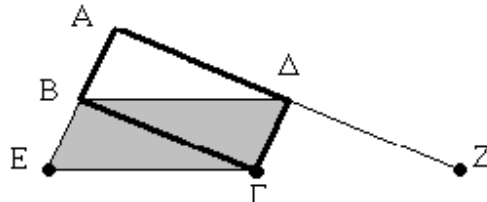


ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BE=AB$ και στην προέκταση της $A\Delta$ παίρνουμε τμήμα $\Delta Z=A\Delta$.



Αποδείξτε ότι:

- A.** Το $B\Delta\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο **B.** Τα σημεία E, Γ, Z είναι συνευθειακά.

2. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E το μέσο της $A\Delta$. Στο E φέρουμε μια ευθεία κάθετη στη BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο Z , και την ευθεία BA στο N . Να αποδείξετε ότι :

α. $EN = EZ$

β. $BZ = \Delta Z + \Delta\Gamma$

3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ το ύψος του AH και η διάμεσος του AM . Προεκτείνω την διάμεσο του AM κατά τμήμα $ME = AM$ και το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$. Να δείξετε ότι :

- α)** το $HME\Delta$ είναι τραπέζιο. **β)** το $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

4. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$ και AK διχοτόμος της γωνίας A που τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο K . Αν Λ μέσον της AK να δείξετε ότι:

- α)** Η $B\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ **β)** $B\Lambda = \frac{AB}{2}$

5. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = 2 AB$. Δείξτε ότι:

α) Αν Z , H μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα τότε : $ZH = \frac{3 \cdot AB}{2}$

- β)** Αν E μέσο της $\Gamma\Delta$ τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν η ZH τέμνει τις AE , BE στα σημεία Θ , I αντίστοιχα τότε $\Theta I = \frac{AB}{2}$

6. Δίνεται γωνία $\chi O\psi < 90^\circ$, Εστω Oz η διχοτόμος της γωνίας και σημείο M της διχοτόμου. Φέρνουμε τις $MA \perp Oz$ και $MB \perp O\psi$. Αν Δ είναι το μέσο της OM και E είναι το μέσο της AB να δείξετε ότι:
i) $AD = BD$ ii) $DE \perp AB$
7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD το ύψος του. Αν M είναι το μέσο της AB και N το μέσο της $A\Gamma$, να υπολογισθούν:
α. Τα τμήματα DM , DN συναρτήσει των καθέτων πλευρών AB και $A\Gamma$.
β. Να αποδειχθεί ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου $AMDN$ ισούται με $AB + A\Gamma$.
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στη προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε σημείο P . Αν $PH \perp AB$, $PK \perp A\Gamma$, $\Gamma\Theta \perp AB$, και $\Gamma\Lambda \perp PH$, να αποδείξετε ότι:
α) η γωνία $K\Gamma P$ είναι ίση με την γωνία $\Lambda\Gamma P$.
β) $PK = P\Lambda$
γ) $PH - PK = \Gamma\Theta$.
9. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB , ένα τυχαίο σημείο του Γ και ημιευθεία $\Gamma\chi$ η οποία να μην έχει τον ίδιο φορέα με το AB . Στην ημιευθεία $\Gamma\chi$ παίρνουμε τα σημεία Δ και E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma A$ και $\Gamma E = \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι $AD \perp BE$.
10. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB < \Gamma\Delta$ και η γωνία B είναι τριπλάσια της γωνίας Γ . Αν E το μέσον της $B\Gamma$ και η κάθετος στην $B\Gamma$ στο σημείο E τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο Z
1. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τραpezίου.
2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και διάμεσος αυτού BD . Θεωρούμε E το μέσο της BD και φέρουμε την AE και στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα $EZ = EA$. Αν Θ είναι το σημείο τομής της AZ με την $B\Gamma$ και P το σημείο τομής της ΔZ με την $B\Gamma$ να δείξετε ότι:
1. Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
2. Το Θ είναι το κέντρο βάρους του $B\Delta Z$.
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και οι διάμεσοι AD, BE που τέμνονται στο σημείο Θ . Αν K το μέσο της $\Theta\Gamma$ και Λ το σημείο τομής των BK, AD να δείξετε ότι
α) $\Theta\Lambda = \frac{2}{9}AD$
β) Το $\Theta EK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

14. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 30^\circ$ η κάθετος στο μέσο M της υποτείνουσας $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι $M\Delta = A\Delta$.

15. Α. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$. Αν AM η διάμεσος τότε $\widehat{AMB}$ ισούται.

α. 50° β. 100° γ. 80° δ. 40° ε. 60°

Β. Έστω $AB\Gamma$ είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος προς την υποτείνουσα. Αν M μέσο της AB και N μέσο της $A\Gamma$ τότε το άθροισμα $\Delta M + \Delta N$ ισούται

α. $AB + A\Gamma$ β. $\frac{AB + A\Gamma}{2}$ γ. $\frac{B\Gamma}{2}$ δ. $\frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2}$ ε. $\frac{AB + B\Gamma}{2}$

16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ χωρίζεται από τη διάμεσο AM σε δύο τρίγωνα που το ένα είναι ισόπλευρο και το άλλο ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

17. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E το μέσο της $A\Delta$.

Στο E φέρουμε ευθεία κάθετη στη BE που τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο Z και την BA στο N .

Να αποδείξετε ότι : α) $EN = EZ$ β) $BZ = \Delta Z + \Delta\Gamma$

18. Α. Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει γωνία $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 5$

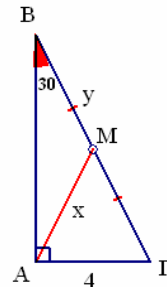
Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:

α. 10 β. 11 γ. 12 δ. 13 ε. 14

Β: Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και AH το ύψος του. Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

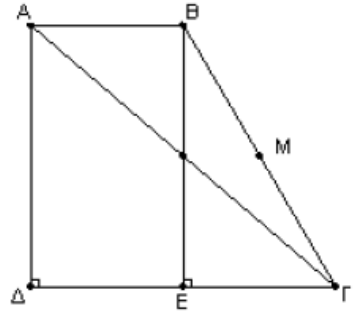
19. Α. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα τμήματα $AM = x$, $BM = y$

Β. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος $A\Delta$. Αν E , Z , H είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι ΔEZH είναι παραλ/μο.



20. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) στο οποίο οι γωνίες A και Δ είναι 90° , η $B\Gamma$ είναι διπλάσια της AB και η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Γ .

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ .
2. Η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί την BE (κάθετη από το B στην $\Gamma\Delta$).
3. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε το $ABME$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

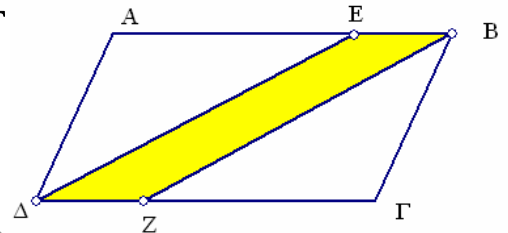


21. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, η ΔE είναι διχοτόμος της

γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$ και η BZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα ΔAE και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
- γ. Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



22. Θεωρούμε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 90^\circ + \widehat{\Gamma}$. Έστω H το ορθόκεντρο του $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\widehat{HAB} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$
- β. Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.
- γ. $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{B\hat{\Gamma}H}$
- δ. Η ευθεία AH είναι κοινή εφαπτομένη των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $B\hat{H}\Gamma$.

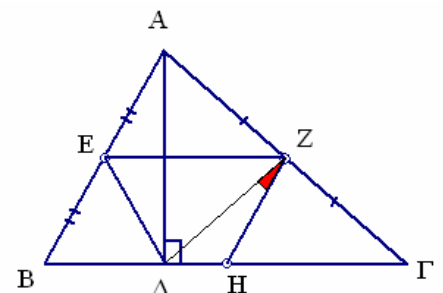
23. Τρία αγροκτήματα A , B και Γ απέχουν $AB=10\text{km}$, $A\Gamma=12\text{km}$ και $B\Gamma=11,5\text{km}$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρία αγροκτήματα σχηματίζουν τρίγωνο.
- β) Η κοινότητα για να τους εξυπηρετήσει κατασκεύασε δρόμο που διέρχεται από τα μέσα Δ και E των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και να βρεθεί το μήκος της ΔE .
- γ) Οι κτηματίες B και Γ ισχυρίζονται ότι ο δρόμος περνά πιο κοντά από το αγρόκτημα A . Αποδείξτε ότι ο δρόμος ισαπέχει και από τα τρία αγροκτήματα.

24. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE=AB$. Αν η ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο H και την $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι :

i) $BZ = Z\Gamma$ ii) $\Gamma H = \frac{AH}{2}$

25. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, $\hat{B} > 90^\circ$.
Φέρνουμε τμήμα $AE \perp B\Gamma$ (το E στη προέκταση του $B\Gamma$) και έστω Z το μέσο του $\Gamma\Delta$ και H το μέσο του AB . Να δείξετε ότι :
α. Το $HB\Gamma Z$ είναι ρόμβος
β. $HE = HB = HZ$.
26. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
Έξω από αυτό κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο E . Να αποδείξετε ότι :
α. $AB \parallel \Gamma\Delta$
β. Το σημείο A είναι μέσο του $E\Gamma$ και το σημείο B μέσο του $E\Delta$.
27. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB \parallel \Gamma\Delta$, δίνεται ότι $\Gamma\Delta = 3 \cdot AB$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο O . Επίσης, τα K, Λ είναι τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι: α. $K\Lambda = AB$ β. $AO = \frac{1}{4} \cdot A\Gamma$.
28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνουμε δύο σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = AE$.
Να αποδείξετε ότι:
Α) $B\Delta = \Gamma E$
Β) Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.
Γ) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
29. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K, Λ των πλευρών AB και $A\Gamma$ φέρουμε $KE, \Lambda\Delta$ κάθετα στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα KEB και $\Lambda\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
30. Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), να αποδείξετε ότι :
1. $\Delta E \parallel B\Gamma$
2. το $\Delta E\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
31. Στο διπλανό σχήμα το $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{B} > \hat{\Gamma}$) προς τη $B\Gamma$, η ΔE είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Delta$, $EZ \parallel B\Gamma$ και $ZH \parallel AB$. Να αποδειχθεί ότι:
α) $ZH = EB$
β) Το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισοσκελές
γ) Το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο
δ) Η EZ διχοτομεί την γωνία $\hat{\Delta E A}$
ς) $\hat{\Delta Z H} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$



32. Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma_{\Delta}$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και $A\Delta$, αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $K\Lambda = MN$.
β) Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Να αποδείξετε ότι $KN = K\Lambda$.
δ) Να αποδείξετε ότι τα KM και $N\Lambda$ είναι κάθετα.
33. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda = 10$ και το μέσο του M . Κατασκευάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $AK = \Lambda\Delta = 8$ προς το ίδιο μέρος του $K\Lambda$ έτσι ώστε:
 $\widehat{AKM} = \widehat{\Lambda M\Delta} = 120^\circ$
α) Να αποδείξετε ότι $AM = M\Delta$.
β) Φέρνουμε τα AB και $\Delta\Gamma$ κάθετα στη $K\Lambda$ (όπου B, Γ σημεία της ευθείας $K\Lambda$).
Να αποδείξετε ότι $BK = 4$.
γ) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
δ) Να υπολογίσετε το μήκος του $A\Delta$.
34. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και η διάμεσός του MN (M σημείο του $A\Delta$ και N σημείο του $B\Gamma$). Έστω επίσης ότι η BK είναι διχοτόμος της γωνίας B (K σημείο του MN).
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BNK είναι ισοσκελές.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
γ) Αν η προέκταση της BK τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο σημείο Z , έτσι ώστε $Z\Gamma = \Delta\Gamma - AB$, να αποδείξετε ότι το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
35. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 120^\circ$. Αν $AB = 6$ cm, $B\Gamma = 4$ cm και AA_1, BB_1 τα ύψη του από τις κορυφές A και B , να υπολογίσετε:
α) την πλευρά $\Gamma\Delta$
β) τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου
γ) το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του.
36. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) είναι $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{B}$. Στο μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο σημείο Δ .
α) Να δείξετε ότι $\widehat{B} = 30^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$.
γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta B K$ είναι ίσα.
37. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε ΔE κάθετη στη $B\Gamma$, που τέμνει την προέκταση της AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:
α. $AB = BE$.
β. Το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.
38. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο $\Delta E Z$ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο $B\Delta E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

39. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ και M μέσο της $B\Gamma$. Η μεσοκάθετη της $B\Gamma$ τέμνει την AG στο Δ και την προέκταση της BA στο E .
Να δείξετε ότι :

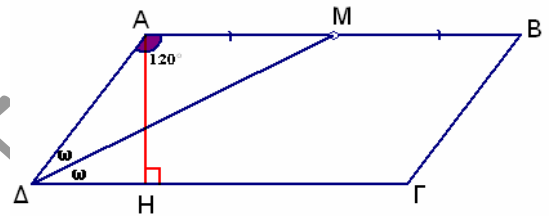
- i) η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$ και μεσοκάθετη της AM
- ii) $\Delta M = A\Delta = \frac{AG}{2}$
- iii) $\Delta E = \frac{2}{3} \cdot AG$

(4^ο ΓΕΛ – 2009)

40. Στο διπλανό σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ στο οποίο $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ διέρχεται από το μέσο M της AB .

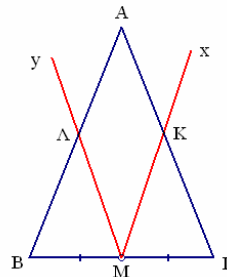
- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- γ. Αν AH είναι το κάθετο τμήμα προς τη $\Delta\Gamma$,

τότε να δείξετε ότι : $\Delta H = \frac{AM}{2}$



41. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Από το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$, φέρνουμε $Mx \parallel AB$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο K και $My \parallel A\Gamma$ που τέμνει την AB στο Λ .
Να δείξετε ότι :

- A. Τα τρίγωνα $B\Lambda M$ και $\Gamma K M$ είναι ίσα.
- B. Το τετράπλευρο $MK\Lambda\Lambda$ είναι ρόμβος.



42. Δίνεται κύκλος ($O, 5\text{ cm}$), M εξωτερικό σημείο και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB αυτού. Προεκτείνουμε την OB κατά $OG = OB$.

- A. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- B. $\widehat{AM\Gamma} = 3 \cdot \widehat{BM\Gamma}$
- Γ. Αν $M\Gamma = 10\text{ cm}$, να υπολογίσετε σε μοίρες την γωνία $\widehat{AM\Gamma}$

