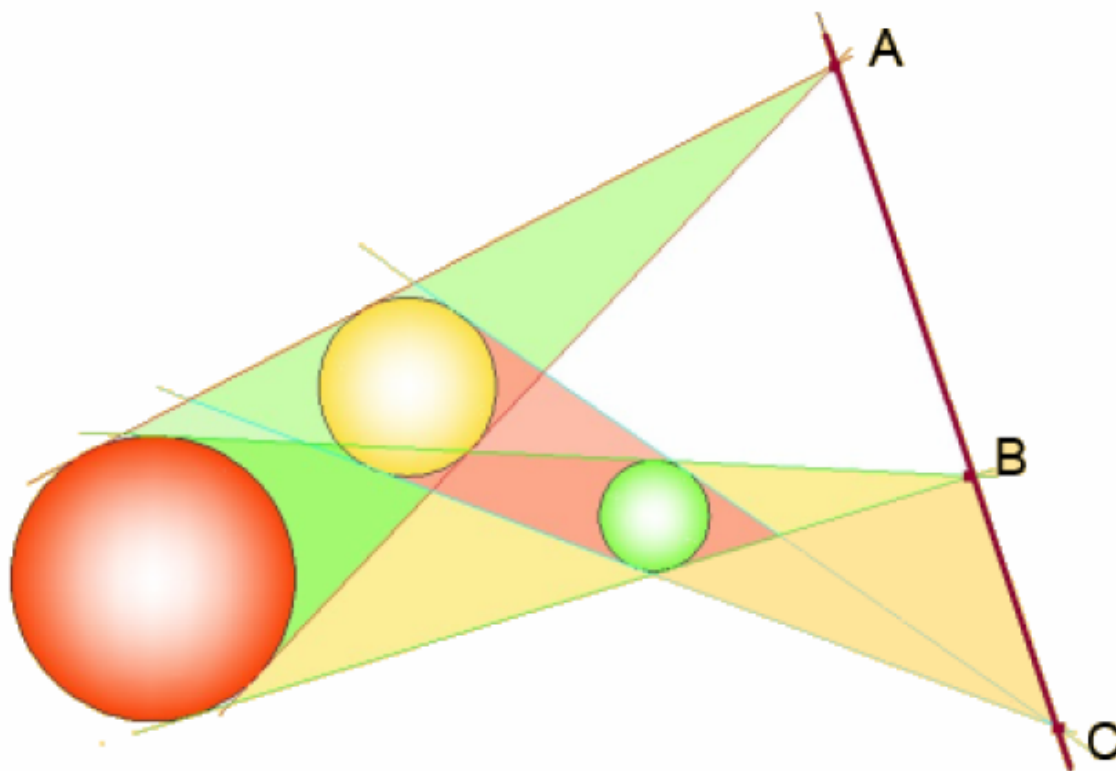




ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ





Στοιχεία και είδη τριγώνων

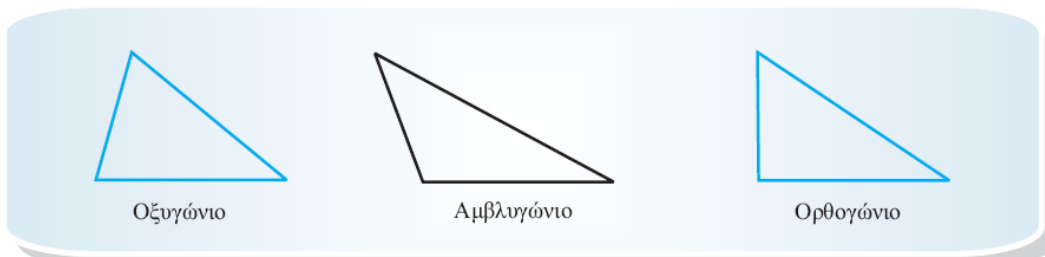
Τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους χωρίζονται σε:

- **Σκαληνά**, αν έχουν άνισες πλευρές.
- **Ισοσκελή**, αν έχουν δυο πλευρές ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** του τριγώνου και η απέναντι της κορυφή λέγεται **κορυφή** αυτού.
- **Ισόπλευρα**, αν και οι τρεις πλευρές είναι ίσες.



Τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους χωρίζονται σε:

- **Οξυγώνια**, αν και οι τρεις γωνίες τους είναι οξείες.
- **Ορθογώνια**, αν έχουν μια ορθή γωνία. Τότε οι δυο πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** και η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**.
- **Αμβλυγώνια**, αν έχουν μια αμβλεία γωνία.



Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι:

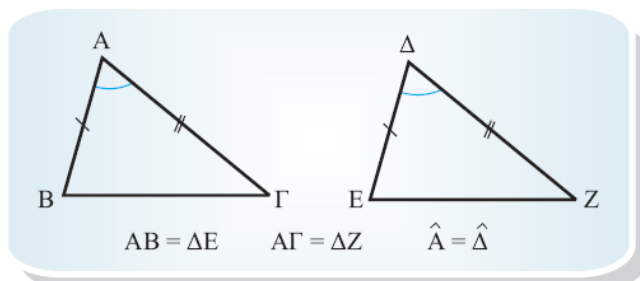
- **Η διάμεσος** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- **Η διχοτόμος** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
- **Το ύψος** που είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



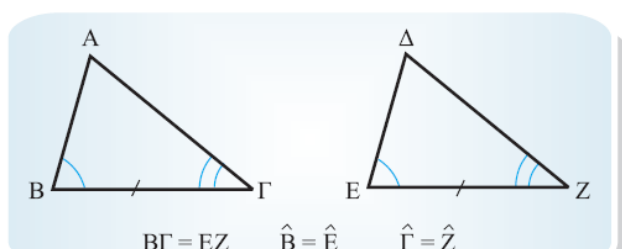


Κριτήρια ισότητας τριγώνων

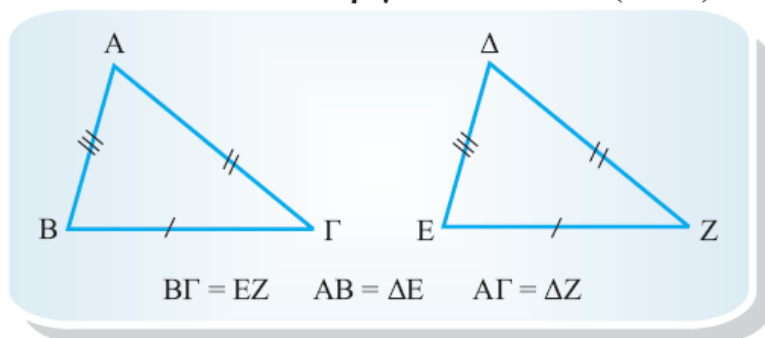
1ο κριτήριο. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα (ΠΓΠ).



2ο κριτήριο Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ).



3ο κριτήριο Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΠΠ).



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

1ο κριτήριο: Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

2ο κριτήριο: Μια πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.



Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

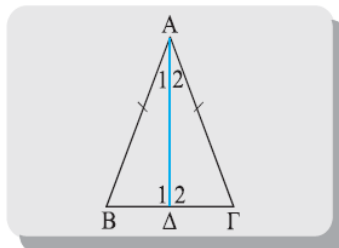
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$.

Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν $AB=AG$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

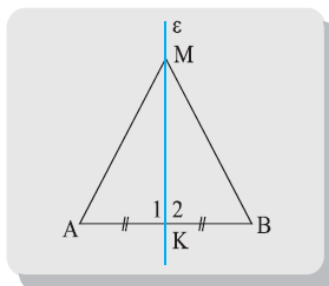
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta=\Delta\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι διάμεσος και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{A}_1=\hat{A}_2=90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.



Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και M ένα σημείο της. Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν $KA=KB$, MK κοινή και $\hat{K}_1=\hat{K}_2=90^\circ$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $MA=MB$.



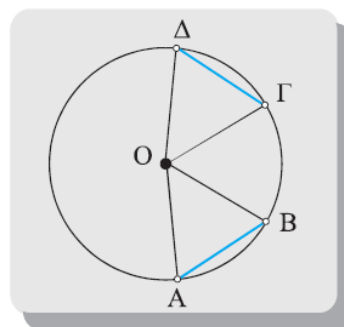
Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O,ρ) .

Τότε είναι $\hat{A}\hat{O}\hat{B}=\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA=O\Gamma(=\rho)$, $OB=O\Delta(=\rho)$ και $\hat{A}\hat{O}\hat{B}=\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.

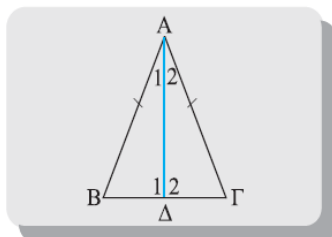
Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB=\Gamma\Delta$.



Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

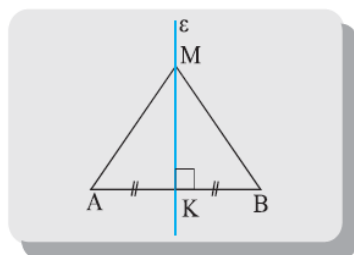
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $A\Delta$ η διάμεσός του (σχ.1). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ έχουν $AB=AG$, $A\Delta$ κοινή και $B\Delta=\Delta\Gamma$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.



Σχήμα 1



Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.



Σχήμα 2

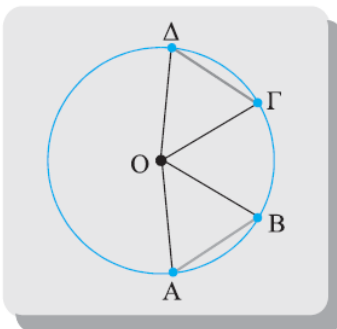
Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ. 2), M ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB .

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

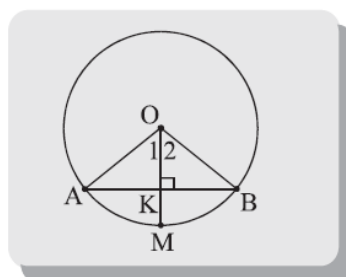
Έστω δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με $AB = \Gamma\Delta$. Τότε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν: $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $AB = \Gamma\Delta$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $\angle AOB = \angle \Gamma\Delta$, οπότε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια χορδή του AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M . Επειδή το τμήμα OK είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το K είναι μέσο του AB και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.



Θεώρημα

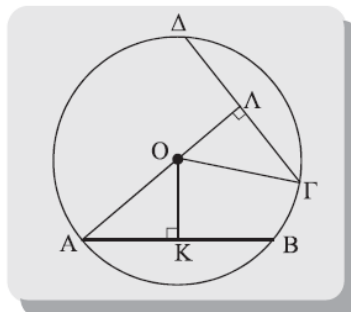
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) και OK , OL τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$, έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma (= \rho)$ και $AK = \Gamma L$ (αφού $AB = \Gamma\Delta$). Επομένως είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$ έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma$ και $OK = OL$, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma L \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$



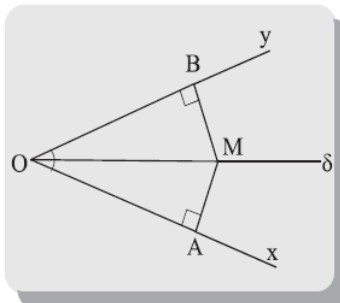
**Θεώρημα**

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $\chi\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα AOM και BOM είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.

**Θεώρημα**

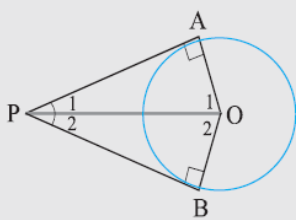
Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Θεώρημα

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ. 2) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και $OA = OB (= r)$, άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.



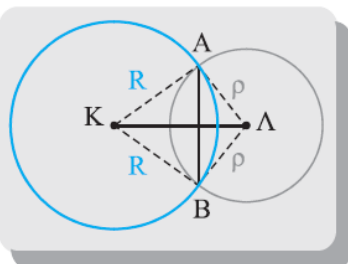
Σχήμα 2

Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) (σχ. 3) και A, B τα σημεία τομής τους. Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB . Όμοια από την $\Lambda A = \Lambda B = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB . Άρα, η $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.



Σχήμα 3

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.



Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

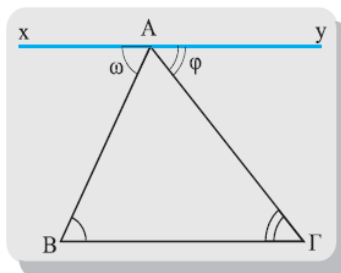
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy // B\Gamma$. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\text{L}$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}.$$



i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .



Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

- i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

- i) Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου να είναι $2n-4$ ορθές.
- ii) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

Ορισμός.

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD \parallel B\Gamma$.

• Ιδιότητες παραλληλογράμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

• Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

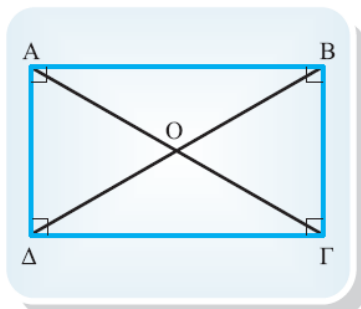
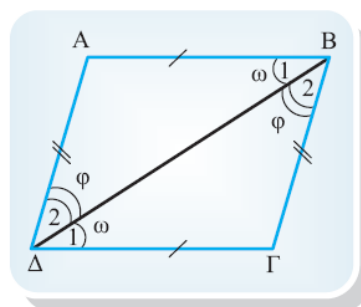
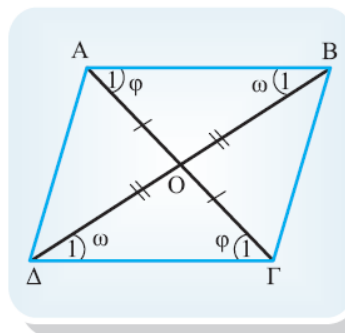
Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- ii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- iii. Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- iv. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Ορισμός.

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.





• Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

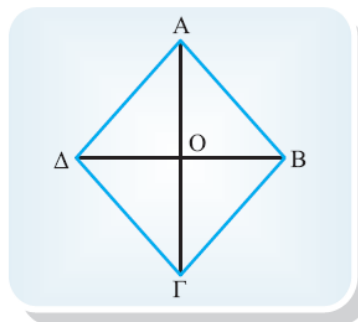
- i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- iii. Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- iv. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ρόμβος.

Ορισμός.

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.



• Ιδιότητες του ρόμβου.

- i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος.

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- iii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

• Οι διαγώνιοι του ρόμβου:

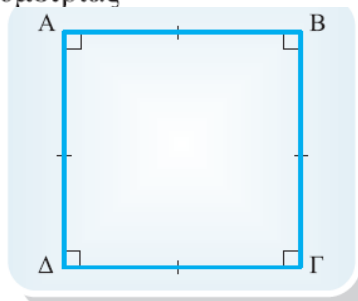
- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| α. διχοτομούνται | β. τέμνονται κάθετα |
| γ. διχοτομούν τις γωνίες | δ. είναι άξονες συμμετρίας |

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

• Ιδιότητες του τετραγώνου.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- ii. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- iii. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.





• **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο.**

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

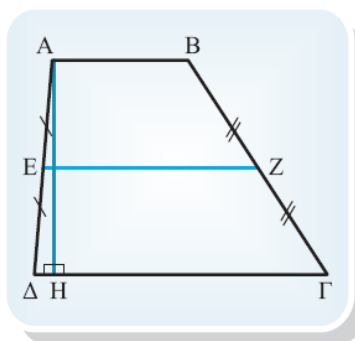
Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- iii. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- v. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Ορισμός:

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές AB και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



Ισοσκελές τραπεζίο

Ορισμός:

Ισοσκελές τραπεζίο λέγεται το τραπεζίο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

• **Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου**

Αν ένα τραπεζίο είναι ισοσκελές, τότε:

- i. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- ii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

• **Κριτήρια για να είναι ένα τραπεζίο ισοσκελές**

Ένα τραπεζίο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- i. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- iii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

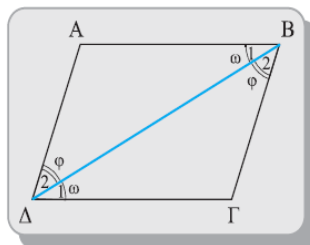
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ (σχ. 1). Έχουμε:

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$B\Delta$ κοινή πλευρά.

$$\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

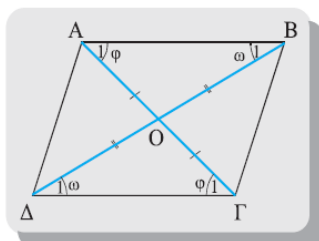
Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 1

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$. Έχουμε:



$$AB = \Gamma\Delta$$

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Άρα, τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$.

Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

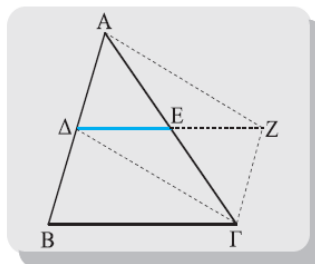
Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $A\Delta \parallel \Gamma Z$, οπότε $\Delta B \parallel \Gamma Z$, αφού $A\Delta = \Delta B$. Έτσι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

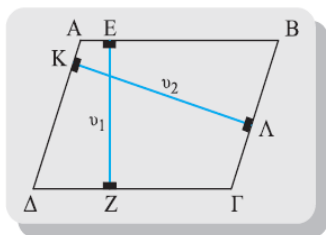
(i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

$$(ii) \Delta Z = B\Gamma \text{ ή } 2\Delta E = B\Gamma \text{ ή } \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}.$$

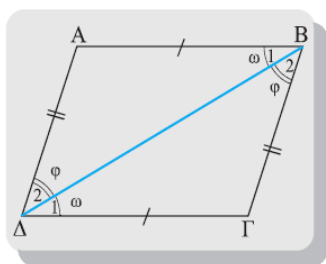


Θεώρημα

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- (ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

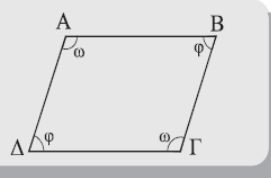
Θεωρούμε τετράπλευρο ABΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

(i) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (σχ. 1). Αν φέρουμε τη διαγώνιο BD, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ABΔ και BΓΔ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και BD κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

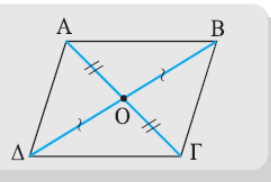
(ii) Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ. 2). Τα τρίγωνα ABΔ και BΓΔ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η BD είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ. 3) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$ (σχ. 4). Τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 3



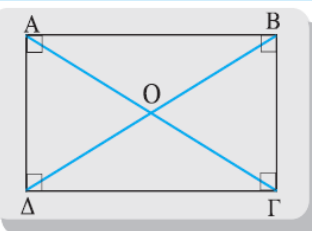
Σχήμα 4

Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω ABΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες

Τα τρίγωνα ABΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΔ κοινή, $AB = \Delta\Gamma$), οπότε $A\Gamma = B\Delta$.



Θεώρημα

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

**Θεώρημα**

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

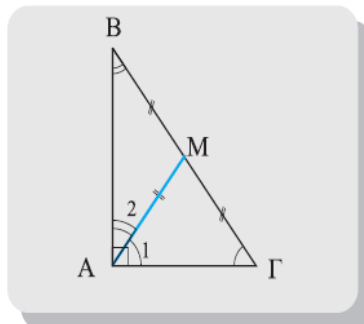
Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τη διάμεσό του AM .

Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε $AM = M\Gamma$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και $AM = MB$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε $2\hat{A} = 2L$ ή $\hat{A} = 1L$.

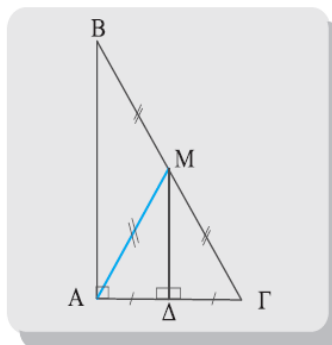
**Θεώρημα**

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του AM (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

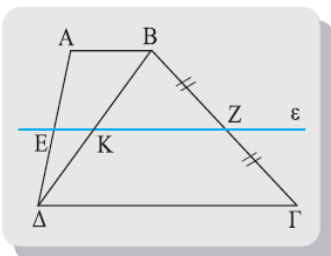
Φέρουμε τη διάμεσο $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$. Το $M\Delta$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $M\Delta \parallel AB$. Αλλά $AB \perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta \perp A\Gamma$. Άρα, το $M\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $AM\Gamma$, οπότε $AM = M\Gamma$, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.



**Θεώρημα**

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε: i) $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ και ii) $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

**Απόδειξη**

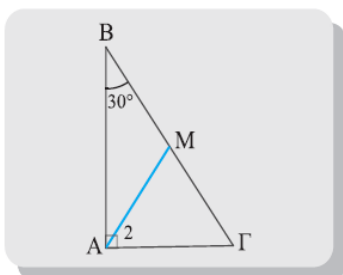
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και $EK \parallel AB$, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $EK = \frac{AB}{2}$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και $KZ \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $KZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2). Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και i) $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ή $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

**Απόδειξη**

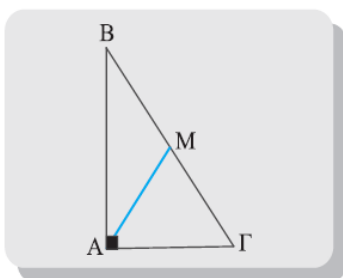
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.

Θα αποδείξουμε ότι $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $AG = MG = \frac{B\Gamma}{2}$.

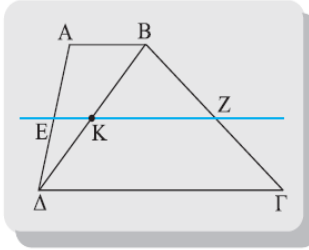
Αντίστροφο

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = AG$ (αφού $AG = \frac{B\Gamma}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.





Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

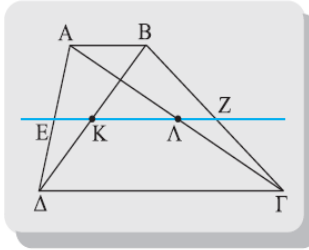


Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ, στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και

$$ΕΛ = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (3).$$

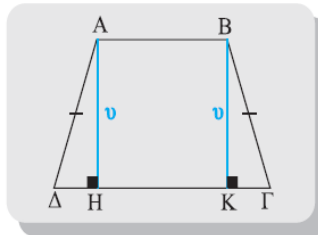
Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:



$$ΕΛ - ΕΚ = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \quad \text{ή} \quad ΚΛ = \frac{\Gamma\Delta - ΑΒ}{2} \quad (\text{με } \Gamma\Delta > ΑΒ).$$

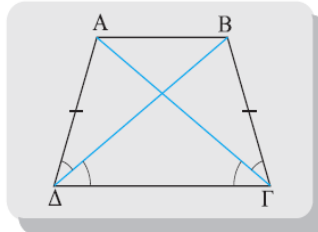
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Απόδειξη

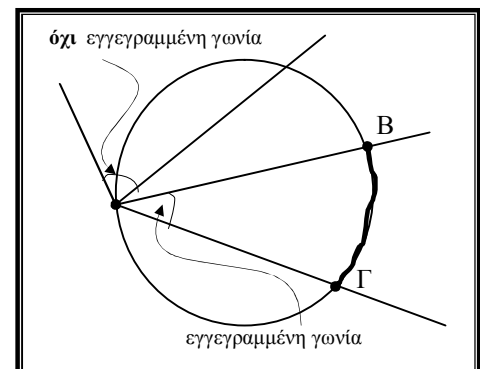
- (i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.
- (ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\hat{A\Delta\Gamma} = \hat{B\Gamma\Delta}$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



ΓΩΝΙΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Κάθε γωνία που έχει την κορυφή της πάνω σε έναν κύκλο και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου.

Το τόξο του κύκλου που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο ή λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία βαίνει στο τόξο $\widehat{ΒΓ}$.





Πρόταση: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο με αυτήν τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του $\widehat{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\widehat{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AGB}$ (σχ. α).

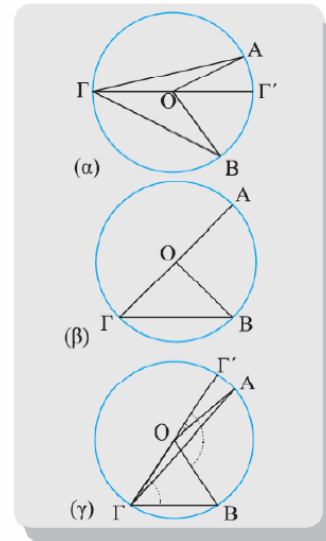
Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ .

Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{OAG} = \widehat{OGA}$.

Η $\Gamma'\widehat{OA}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AO\Gamma$, επομένως $\Gamma'\widehat{OA} = 2\widehat{OGA}$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\widehat{OB} = 2\widehat{OGB}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

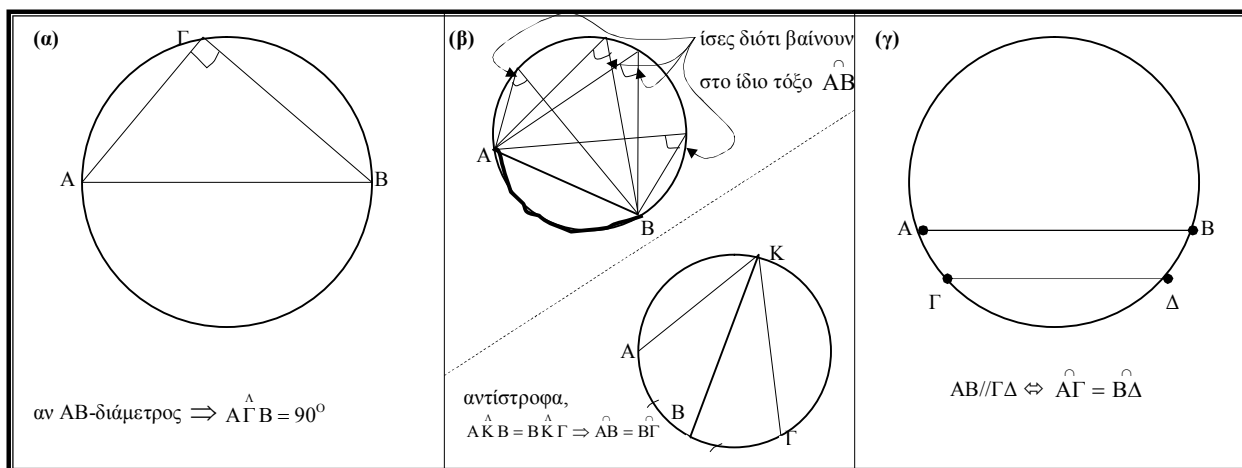
$$\widehat{A'OB} = 2\widehat{AGB}.$$



Πόρισμα: (α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή

(β) Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίδια τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες, και αντίστροφα

(γ) τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών ενός κύκλου είναι ίσα και αντίστροφα.



Πρόταση: (γωνία χορδής + εφαπτομένης)

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή AB ενός κύκλου και την εφαπτομένη ε στο ένα άκρο της χορδής ισούται με

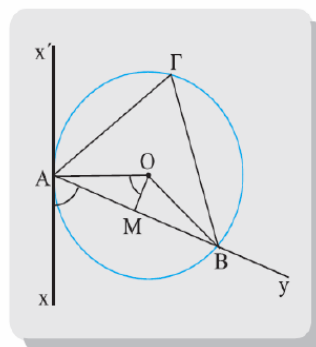
κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο της χορδής. Δηλαδή, $\widehat{xAB} = \widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $\widehat{xAy}$ είναι οξεία (σχ. 6) και $\widehat{AGB}$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής AB . Γνωρίζουμε ότι $\widehat{AGB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα OM , οπότε $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \widehat{AGB}$. Αλλά $\widehat{xAy} = \widehat{AOM}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.

Επομένως $\widehat{xAy} = \widehat{AGB}$.





ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Γνωρίζουμε ότι για κάθε τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου υπάρχει (μοναδικός) κύκλος που διέρχεται και από τα τρία αυτά σημεία.

(Ο κύκλος αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά).

Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα και για τέσσερα σημεία του επιπέδου.

Ορισμός 1: Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο όταν υπάρχει κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Ορισμός 2: Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι κορυφές του είναι σημεία ενός κύκλου..

Πρόταση 1: Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις ιδιότητες:

1. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές,
2. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες,
3. Κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Πρόταση 2: Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

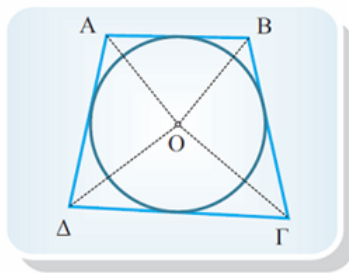
1. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές,
2. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
3. Μία εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Ορισμός 3:

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, αν όλες οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.

Σε κάθε περιγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύουν οι ιδιότητες:

- α. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του.

Θεώρημα (Κριτήριο)

Ένα τετράπλευρο είναι **περιγράψιμο** σε κύκλο αν:

- α. Οι διχοτόμοι τριών τουλάχιστον γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.