

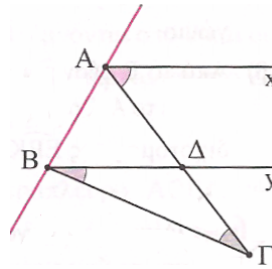


ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Παράλληλες ευθείες – Άθροισμα γωνιών τριγώνου»

1. Στο διπλανό σχήμα είναι: $Ax \parallel By$

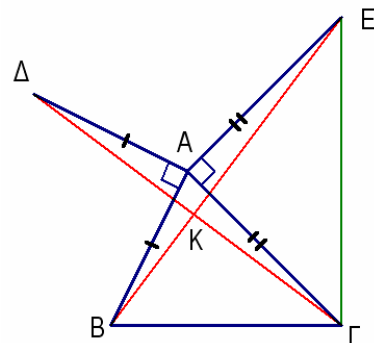
Να αποδείξετε ότι: $\hat{A}\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}\hat{A}x - \hat{\Gamma}\hat{B}y$



2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του AD . Από το Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AG , που την τέμνει στο E . Από το E φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AB , που τέμνει την AB στο Z και την AD στο H . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο EHD είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του AD και ένα σημείο E της πλευράς AB . Από το E φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AD , που τέμνει την AD στο Z και την προέκταση της $B\Gamma$ στο H . Να αποδείξετε ότι $E\hat{H}B = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.
4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Αν η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει την AD στο E , να αποδείξετε ότι: $B\hat{E}A = 45^\circ$.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι του AD , BE και ΓZ . Να αποδείξετε ότι: $A\hat{\Delta}\Gamma + B\hat{E}A + \Gamma\hat{Z}B = 270^\circ$.
6. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K το σημείο τομής των υψών του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
 α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ και β) $B\hat{K}\Gamma = \hat{B} + \hat{\Gamma}$.
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $B\Delta$. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}_{\epsilon\zeta}$ και $\hat{\Gamma}_{\epsilon\zeta}$ τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι: $B\hat{\Delta}E = A\hat{Z}\Gamma$.
8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη διχοτόμο της $\hat{A}_{\epsilon\zeta}$, η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ .
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.
 β) Να εκφράσετε τις γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
9. Μια ευθεία (ζ) τέμνει δύο παράλληλες ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε ένα σημείο Γ του ευθύγραμμου τμήματος AB και τα σημεία Δ και E των (ϵ_1) και (ϵ_2) αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = A\Gamma$, $BE = B\Gamma$ και τα Δ , E να βρίσκονται εκατέρωθεν της (ζ). Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ , Δ , E είναι συνευθειακά.
10. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε χορδή AB , την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $B\Gamma = R$. Το τμήμα ΓO τέμνει τον κύκλο στο Δ και η προέκταση του ΓO τέμνει τον κύκλο στο E . Να αποδείξετε ότι: $E\hat{O}A = 3 \cdot B\hat{O}\Gamma$.
11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 4 \cdot \hat{B}$.
 α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
 β) Έστω M το μέσο της $B\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AM , που τέμνει την AB στο E και την προέκταση της ΓA στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.



12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 18^\circ$. Στην υποτείνουσα $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Αν η μεσοκάθετη του τμήματος $B\Delta$ τέμνει την AB στο K , να αποδείξετε ότι $BK = A\Delta$.
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, το ύψος του $A\Delta$ και οι διχοτόμοι του AE , BZ και ΓH . Αν I είναι το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και Θ το σημείο τομής των $A\Delta$ και BZ , να αποδείξετε ότι: $B\hat{\Theta}\Delta = \Gamma\hat{I}E$.
14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το Γ . Η μεσοκάθετη του $\Gamma\Delta$ τέμνει την $A\Delta$ στο E .
- α) Να αποδείξετε ότι: $A\hat{\Gamma}E = B\hat{A}\Delta$.
- β) Από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ΓE , που τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{A}\Delta$.
15. Θεωρούμε οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι φορείς των υψών $B\Delta$, ΓE και της διχοτόμου AZ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο, του οποίου η γωνία κορυφής είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABM και $A\Gamma N$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $GM = BN$, β) αν τα GM και BN τέμνονται στο K , τότε $B\hat{K}\Gamma = 120^\circ$.
17. Σε ευθεία (ϵ) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ , με $AB = 2B\Gamma$. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας (ϵ) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$, καθώς και το ύψος ΔH .
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔHB και ΔEB είναι ίσα.
- β) Αν η ευθεία ΔE τέμνει την (ϵ) στο Θ , να αποδείξετε ότι $E\Theta = \Delta H$ και να βρείτε τη γωνία $E\hat{\Theta}\Gamma$.
18. Δίνεται κύκλος κέντρου K σημείο A εκτός αυτού και ένα εφαπτόμενο τμήμα AB . Στο ευθύγραμμο τμήμα AK θεωρούμε σημείο Γ , ώστε $A\Gamma = AB$. Έστω επίσης ότι η ευθεία $B\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ .
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma K\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- β) Από το B φέρνουμε ευθεία κάθετη στο AK , που τέμνει το AK στο E . Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $E\hat{B}K$.
19. Δίνονται δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και δύο σημεία A και B των Ox και Oz αντίστοιχα. Στην Oy θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ , ώστε $O\Gamma = OA$ και $O\Delta = OB$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.
20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$.
- α) Να αποδείξετε ότι: $A\hat{\Gamma}E = 2 \cdot B\hat{A}\Delta$.
- β) Θεωρούμε σημείο Z του τμήματος $\Delta\Gamma$, ώστε $\Delta Z = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AZ και ΓE τέμνονται κάθετα.
21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από την κορυφή A φέρνουμε τμήματα $A\Delta \perp AB$, με $A\Delta = AB$ και $A\epsilon \perp \Gamma$, με $A\epsilon = A\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:
- α) $BE = \Gamma\Delta$,
- β) το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.





22. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ενός κυρτού πολυγώνου που έχει άθροισμα γωνιών: α) 12 ορθές, β) 720° .
23. Καθεμία από τις γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι ίση με 144° . Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.
24. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Ε και οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}_{εξ}$ και $\hat{\Delta}_{εξ}$ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $\hat{AEB} = \hat{\Gamma ZD}$.
25. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και $\hat{B} = 100^\circ$. Αν Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στο Ε, να βρείτε τη γωνία $\hat{\Gamma E \Delta}$.
26. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, $\varepsilon_4 \perp \varepsilon_2$, $\Delta E = E \Gamma$, $\hat{\Theta \Gamma A} = 15^\circ$ και $\hat{\Theta H K} = 40^\circ$.
Να βρείτε τις γωνίες:
α) του τριγώνου ΓΑΘ, β) του τετραπλεύρου ΗΚΓΔ.
-
27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΒΓ κατά τμήμα $B\Delta = AB$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει ΑΒ στο Ε και την ΑΔ στο Ζ.
α) Να αποδείξετε ότι: $\hat{AZ \Gamma} = 45^\circ$. β) Αν ο κύκλος (Α, ΑΖ) τέμνει τη ΓΖ στο Η, να αποδείξετε ότι: $HA \perp AZ$.
28. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $BE = BD$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.
β) Από το Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΜ, που τέμνει την ΑΔ στο Ζ και την ΑΓ στο Η.
β₁) Αν Κ είναι η προβολή του Ζ στην ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ZK = Z\Delta$.
β₂) Να αποδείξετε ότι $HM = BH - \Delta M$.
29. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μια διάμετρός του ΑΒ και σημείο Γ της ακτίνας ΟΒ, με $OG > \frac{\rho}{2}$. Ο κύκλος (Γ, ΓΟ) τέμνει τον κύκλο (Ο, ρ) στα σημεία Δ και Ε, ενώ η ευθεία ΔΓ τέμνει τον κύκλο (Ο, ρ) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) $B\Gamma = \Delta O - \Delta \Gamma$, β) $\hat{A \hat{O} Z} = 3 \cdot \hat{O \hat{\Delta} \Gamma}$ γ) το Β είναι μέσο του τόξου $\widehat{\Delta E}$,
δ) αν Μ είναι το μέσο του τόξου $\widehat{EZ}$, τότε: $\hat{M \hat{O} \Delta} = 90^\circ$
30. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB < AG$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ κατά τμήμα $AD = AG$ και την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα $AE = AB$.
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.
β) Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι η προέκταση του ΗΑ διέρχεται από το μέσο της ΔΕ.
γ) Αν οι ευθείες ΔΕ και ΓΒ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι: $\hat{EZB} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.
31. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 45^\circ$, και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ, τα οποία τέμνονται στο Η.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B \hat{H} \Gamma}$. β) Να αποδείξετε ότι $AH = B\Gamma$.
32. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ύψος του ΑΔ. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε $BE = BA$.
α) Να αποδείξετε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta A \Gamma}$.
β) Από το Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και τη διχοτόμο της $\hat{\Gamma}_{εξ}$ στο Η. Να αποδείξετε ότι: $\hat{Z \hat{H} \Gamma} = 45^\circ$



33. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. Έστω AD το ύψος του και E σημείο του $D\Gamma$, ώστε $DE = DB$.
 α) Να αποδείξετε ότι: α₁) το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές, α₂) $AB = D\Gamma - DB$.
 β) Αν η διχοτόμος BZ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την AD στο H και την AE στο Θ , να αποδείξετε ότι:
 β₁) $B\hat{\Theta}E = B\hat{A}\Gamma$, β₂) το τρίγωνο ZHA είναι ισοσκελές, β₃) $Z\Gamma - ZA = BH$.
34. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta$. Η μεσοκάθετη του τμήματος AD τέμνει την ευθεία AB στο E . Προεκτείνουμε τη BE κατά τμήμα $EZ = AB$. Να αποδείξετε ότι:
 α) το τρίγωνο AED είναι ισόπλευρο, β) το τρίγωνο $Z\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, γ) $A\hat{Z}\Delta + \Gamma\hat{Z}A = 60^\circ$.
35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος AD και έστω E και Z τα συμμετρικά του Δ , ως προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 α) Να αποδείξετε ότι: α₁) $BE \parallel \Gamma Z$, α₂) $E\hat{A}Z = 90^\circ$, α₃) τα σημεία E, A, Z είναι συνευθειακά και το A είναι το μέσο του EZ .
 β) Αν οι ευθείες AE και ΓB τέμνονται στο K και οι ευθείες EB και AD τέμνονται στο Λ , να αποδείξετε ότι:
 β₁) $EK = \Delta\Lambda$ β₂) $K\Lambda \parallel A\Gamma$
36. Θεωρούμε οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο A της ημιευθείας Oy . Από το A φέρνουμε ευθεία κάθετη στην Ox , που τέμνει την Ox στο B . Οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}O$ και $B\hat{A}y$ τέμνουν την Ox στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Από τα σημεία Γ και Δ φέρνουμε ευθείες κάθετες στην Ox , που τέμνουν την Oy στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 α) $A\hat{\Gamma}O + A\hat{\Delta}x = 270^\circ$, β) το τρίγωνο ZAD είναι ισοσκελές, γ) $ZE = \Gamma E + \Delta Z$, δ) $\Delta\hat{Z}A = 2 \cdot E\hat{\Gamma}A$
37. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε το AD κα τμήμα $AE = B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BZ = A\Gamma$.
 α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα. β) Να αποδείξετε ότι $E\Gamma \perp \Gamma Z$.
 γ) Από το B φέρνουμε ευθεία κάθετη στην EZ , τέμνει τις $EZ, \Gamma Z$ και $E\Gamma$ στα σημεία K, Λ και M αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $KE - KZ = M\Lambda$.
38. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, με $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Στην προέκταση της AD παίρνουμε τμήμα $\Delta E = AB$.
 α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα. β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma A \perp \Gamma E$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.
 δ) Έστω ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο K και οι ευθείες ΓB και ΔA τέμνονται στο Λ , να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\Gamma\hat{K}B$ και $A\hat{\Lambda}B$ τέμνονται κάθετα.
39. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 60^\circ$. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = BA$ και $\Gamma E = \Gamma A$.
 α) Να βρείτε τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.
 β) Έστω K και Λ τα μέσα των AD και AE αντίστοιχα. Αν οι ευθείες KB και $\Lambda\Gamma$ τέμνονται στο M , να βρείτε τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.
40. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 3 \cdot \hat{B}$ και $\hat{B} > 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ .
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
 β) Από το A φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη $\Gamma\Delta$, που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:
 β₁) η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}_{\epsilon\zeta}$, β₂) $AE = A\Gamma + \Gamma\Delta$
41. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Από το Δ φέρνουμε ημιευθεία $\Delta x \perp \Delta B$, η οποία ανήκει στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$ και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο E , ώστε $DE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: α) το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές, β) $A\hat{\Gamma}E = 90^\circ$ γ) η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$, δ) αν η κάθετη από το Γ στη $B\Gamma$ τέμνει τη BE στο Λ και η BE τέμνει την $A\Gamma$ στο K , τότε το τρίγωνο $\Gamma K\Lambda$ είναι ισοσκελές.