



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
(ΕΝΟΤΗΤΑ : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ)

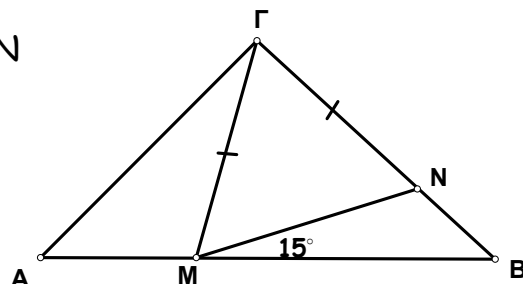
ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 2 \cdot \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} - \hat{B} = 36^\circ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

2. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $3 \cdot \hat{B} = 4 \cdot \hat{\Gamma}$. Η εξωτερική του γωνία στο A είναι ίση με $\frac{7}{3} \cdot \hat{A}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $\Gamma A = \Gamma B$, $\Gamma M = \Gamma N$ και $\hat{NMB} = 15^\circ$.

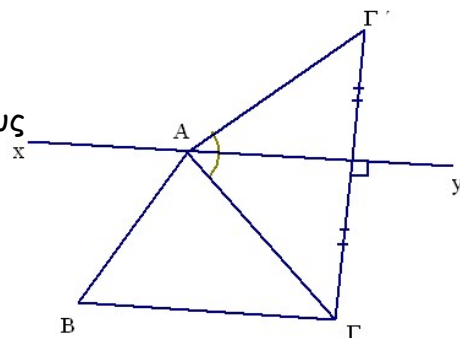
Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A\Gamma M}$;
(" Φ 4" / 228)



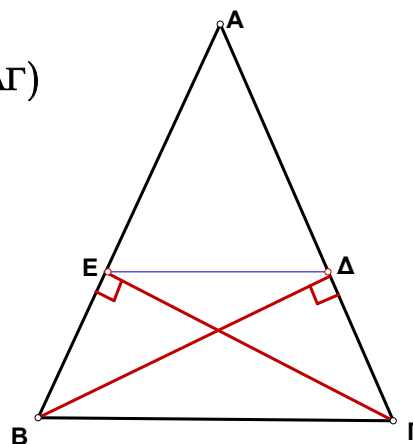
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και παίρνουμε στην πλευρά του $A\Gamma$ τμήμα $AD = AB$. Δείξτε ότι : α) $\hat{B\Lambda\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ β) $\hat{\Delta B\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε τμήμα $AZ = A\Gamma$. Δείξτε ότι : $\hat{Z\Gamma B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

6. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$), $\chi A\gamma$ ευθεία παράλληλη με τη $B\Gamma$ και Γ' το συμμετρικό του Γ ως προς την $\chi\gamma$. Δείξτε ότι : $\hat{\Gamma'AB} = 180^\circ - (\hat{B} - \hat{\Gamma})$.

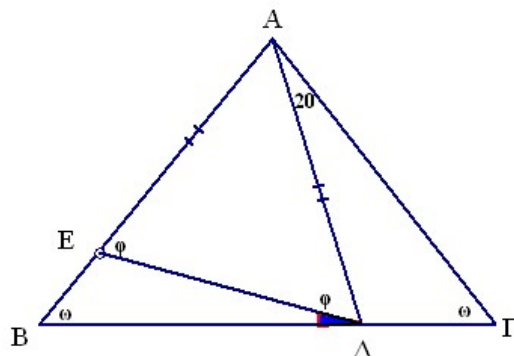


7. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να δείξετε ότι : $E\Delta \parallel B\Gamma$.



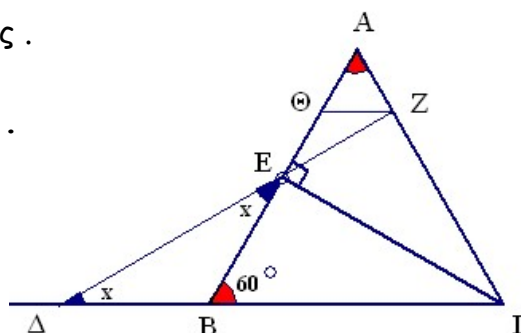


8. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) όπου $\hat{A} > 20^\circ$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$ και $\Delta\hat{A}\Gamma = 20^\circ$. Να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}E$.

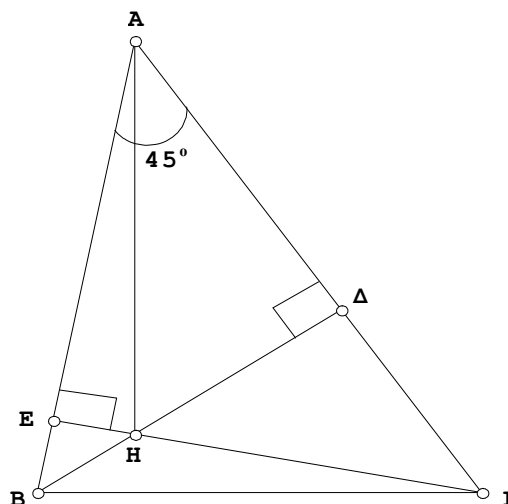


9. Έστω $AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του B), τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Φέρνουμε το ύψος ΓE και έστω Z το σημείο τομής της ΔE με την $A\Gamma$. Από το Z φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AB στο Θ . Να αποδείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $\Delta B E$ είναι ισοσκελές .
β) $\Delta Z \perp A\Gamma$
γ) $AE = 2 \cdot Z\Theta$ και $4 \cdot \Gamma Z = 3 \cdot AB$.

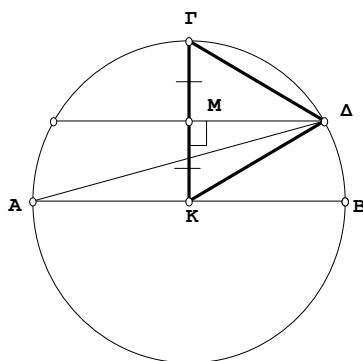


10. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 45^\circ$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στη H . Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και EHB είναι ισοσκελή.
β) $AH = B\Gamma$



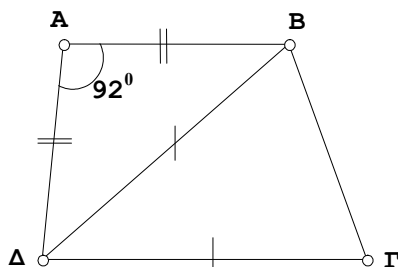


11. Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB και κέντρου K . Από το K φέρω την ακτίνα $K\Gamma \perp AB$ και έστω M το μέσο της $K\Gamma$. Από το M φέρνω την κάθετη στην $K\Gamma$ η οποία τέμνει τον κύκλο στο Δ .
- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
 β) Να δείξετε ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $M\Delta K$.
 γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία $B\Delta\Delta$.

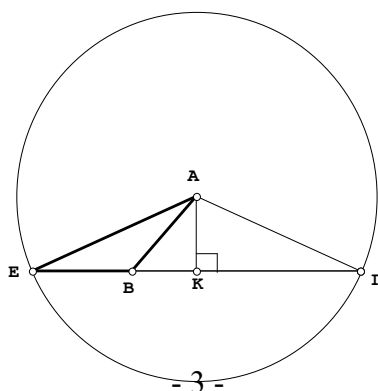


12. Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = A\Delta$, $\Delta B = \Delta\Gamma$ και $\hat{A} = 92^\circ$.

- α) Να δείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
 β) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία Γ .

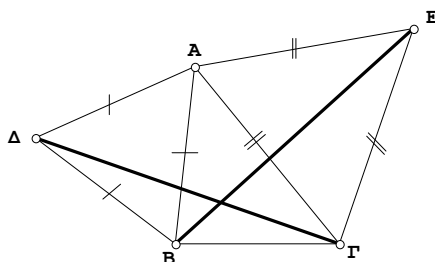


13. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και το ύψος του AK . Ο κύκλος κέντρου A και ακτίνας $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Ναδειχθεί ότι: α) Το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές. β) $K\Gamma = KB + AB$



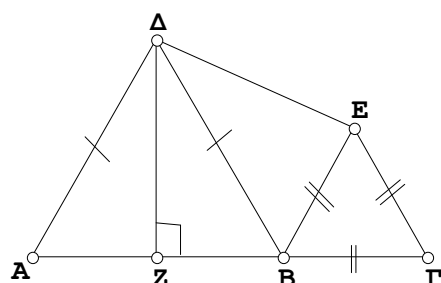


14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και BE είναι ίσα και τέμνονται υπό γωνία 60° .

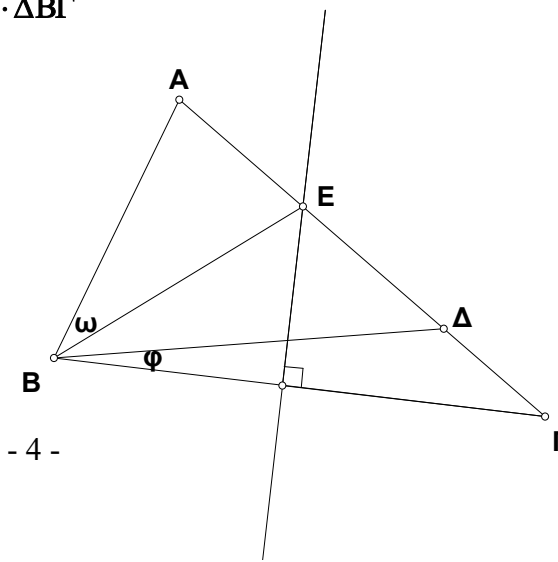


15. Σε ευθεία θεωρούμε κατά σειρά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB=2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

- Η απόσταση ΔZ του Δ από την AB ισούται με ΔE
- $\Delta E \perp BE$
- το τρίγωνο ΔZE είναι ισόπλευρο



16. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά του $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$. Η μεσοκάθετος της πλευράς του $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι $\widehat{ABE} = 2 \cdot \widehat{AB\Gamma}$

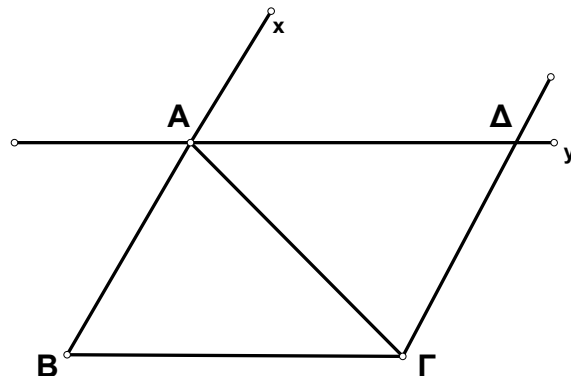




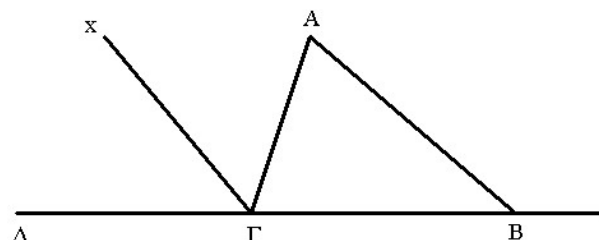
17. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $A\gamma$ είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma A x}$. Δίνεται ακόμη ότι :

$\widehat{B A \Gamma} = 62^\circ$ και $AB = A\Delta$.

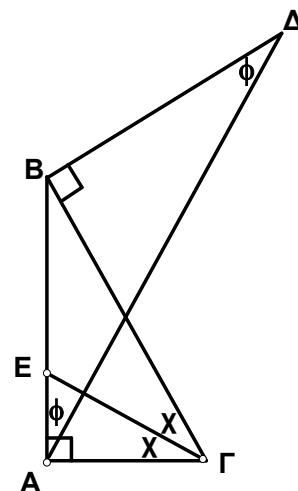
- α) Να βρείτε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
β) Να εξηγήσετε γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A B \Gamma}$.



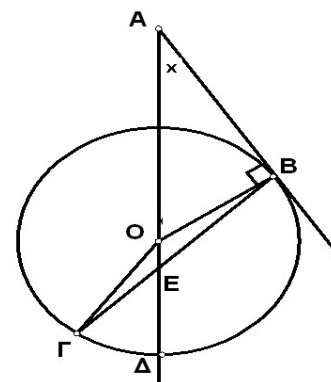
18. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = B\Gamma$ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $\widehat{A \Gamma \Delta}$ είναι παράλληλη στην AB .
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$.
Στο ημιεπίπεδο της $B\Gamma$ που δεν περιέχει το A φέρνουμε κάθετη ημιευθεία προς την $B\Gamma$ στο σημείο B και σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $B\Delta = BA$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος ΓE της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ είναι κάθετη στην $A\Delta$.



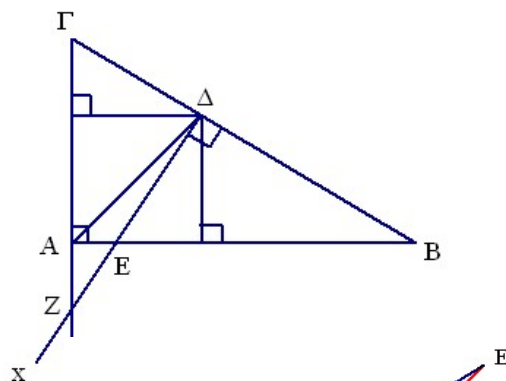
20. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι εφαπτόμενη του κύκλου με κέντρο O και οι AB και $B\Gamma$ σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία $AO\Delta$. Ας είναι $\widehat{BAO} = x$.
α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση της x την γωνία $\widehat{OB\Gamma}$
β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma O A} = 3 \cdot \widehat{A O B}$.



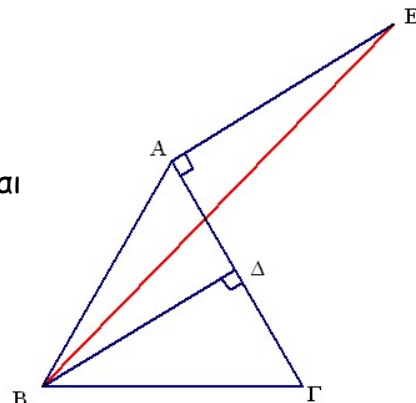


21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB > A\Gamma$ και η διχοτόμος $A\Delta$. Φέρνουμε $\Delta\chi \perp B\Gamma$ που τέμνει την AB στο E και την προέκταση της ΓA στο Z .
Να αποδείξετε ότι :
α) $\Delta E = \Delta\Gamma$ β) $BE = \Gamma Z$.

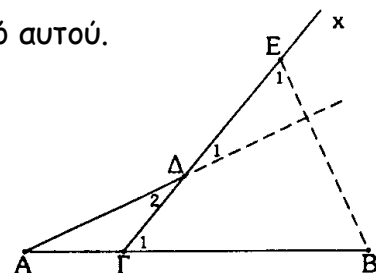
(υπόδειξη : φέρτε τις αποστάσεις του Δ από τις AB και $A\Gamma$)



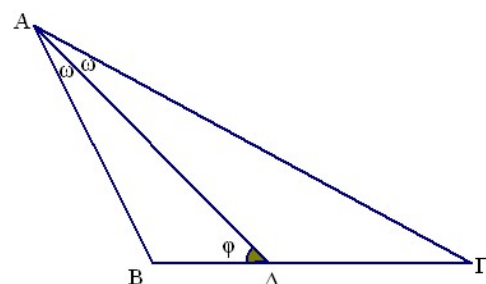
21. Έστω $B\Delta$ ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$.
Αν $\Delta E \perp A\Gamma$ και $A\Gamma = B\Gamma$ ώστε B, E να βρίσκονται εκατέρωθεν της $A\Gamma$, να δείξετε ότι $\widehat{EB\Delta} = 15^\circ$.



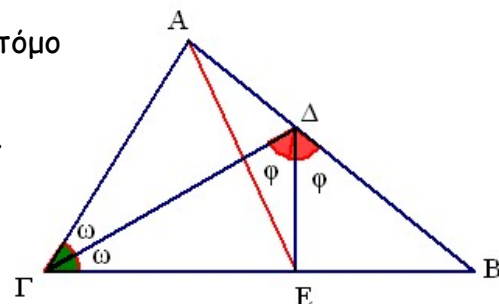
22. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο Γ εσωτερικό αυτού.
Πάνω σε ημιευθεία $\Gamma\chi$, που φέρνουμε από το Γ , παίρνουμε τμήματα $\Gamma\Delta = \Gamma A$ και $\Gamma E = \Gamma B$.
Να δείξετε ότι $BE \perp A\Delta$.



23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$.
Έστω $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
Να δείξετε ότι $\widehat{A\Delta B} = 45^\circ$.

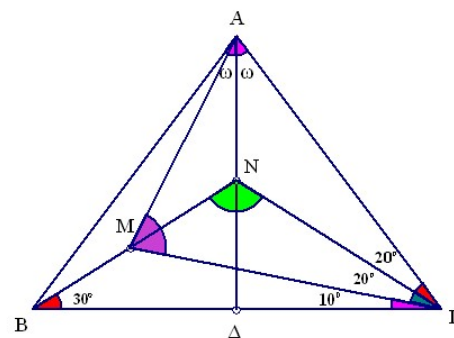


24. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ + \hat{B}$, φέρνω την διχοτόμο του $\Gamma\Delta$ και ΔE διχοτόμο της $\widehat{\Gamma\Delta B}$ (το E ανήκει στη $B\Gamma$). Να δείξετε ότι : $\Gamma\Delta \perp AE$.

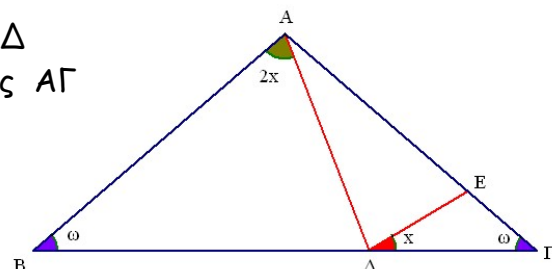




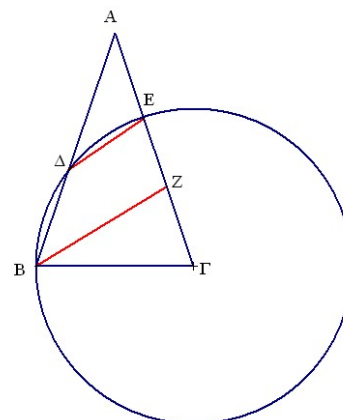
25. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω M εσωτερικό σημείο του με $\widehat{MB\Gamma} = 30^\circ$ και $\widehat{M\Gamma B} = 10^\circ$. Αν N το σημείο τομής της BM και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{BN\Gamma}$ και $\widehat{AM\Gamma}$.



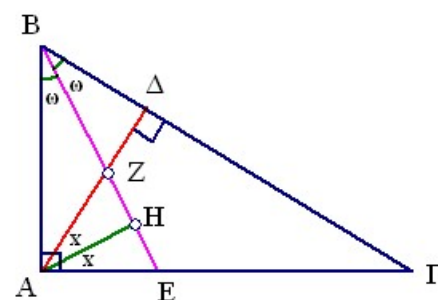
26. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) έστω Δ σημείο της πλευράς $B\Gamma$ και E σημείο της πλευράς $A\Gamma$ ώστε $B\hat{A}\Delta = 2 \cdot \Gamma\hat{\Delta}E$.
Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



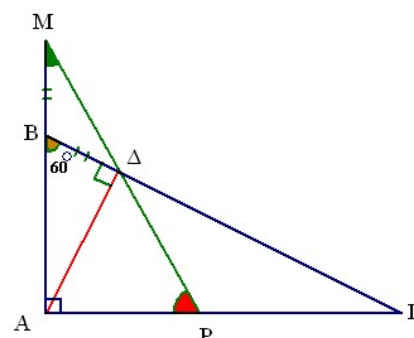
27. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διχοτόμος BZ . Ο κύκλος ($\Gamma, \Gamma B$) τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την πλευρά $A\Gamma$ στο E .
Να δείξετε ότι $BZ \parallel \Delta E$.



28. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $A\Delta$ το ύψος του και BE η διχοτόμος του.
Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι κάθετη στη BE .



29. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{B} = 60^\circ$, $A\Delta$ το ύψος του και στην προέκταση της AB προς το B θεωρούμε σημείο M ώστε $BM = B\Delta$.
Αν η ευθεία $M\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο P τότε:
α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $B\hat{M}\Delta$ και $\Delta\hat{P}A$
β) Να δείξετε ότι $AM = \Delta\Gamma$.





30. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$.

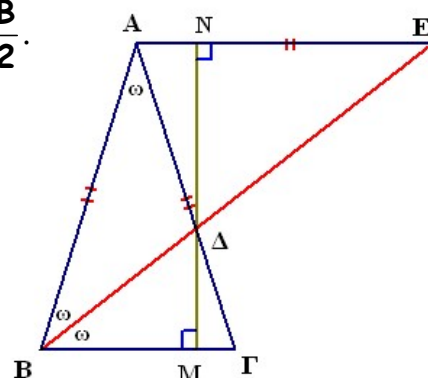
Φέρω τη διχοτόμο $B\Delta$ και στην προέκτασή της
Θεωρώ σημείο E ώστε $AE = AB$.

Να δείξετε ότι :

α) $\triangle AB\Gamma = \triangle EAD$

β) Αν $\Delta M \perp B\Gamma$, $\Delta N \perp AE$,

τότε Δ , M , N είναι συνευθειακά .



31. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 20^\circ$.

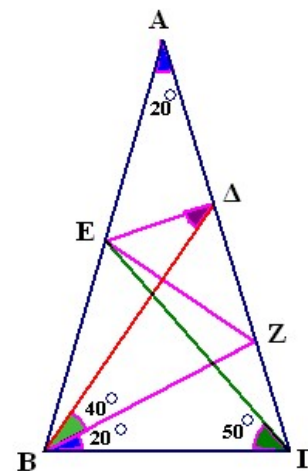
Στις $A\Gamma$ και AB παίρνουμε σημεία Δ και E ,

ώστε $\hat{GB\Delta} = 60^\circ$ και $\hat{B\Gamma E} = 50^\circ$.

Αν Z σημείο της $A\Gamma$ ώστε $\hat{ZB\Gamma} = 20^\circ$ τότε :

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο EZB είναι ισόπλευρο

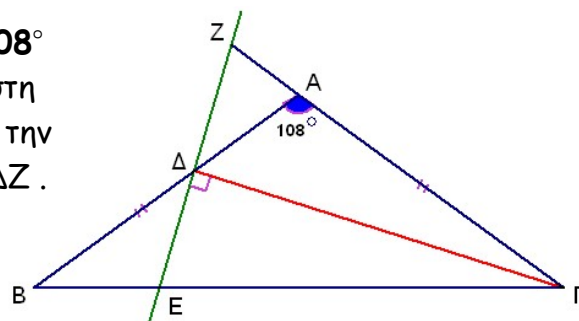
β) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{B\Delta E}$



32. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\hat{A} = 108^\circ$

φέρνουμε την διχοτόμο $\Gamma\Delta$ και την κάθετη στη
διχοτόμο στο Δ , που τέμνει τη $B\Gamma$ στο E και την
 ΓA στο Z . Να δείξετε ότι $BE = \Delta E = \Delta A = \Delta Z$.

(" Ξ 1/ 172 ")

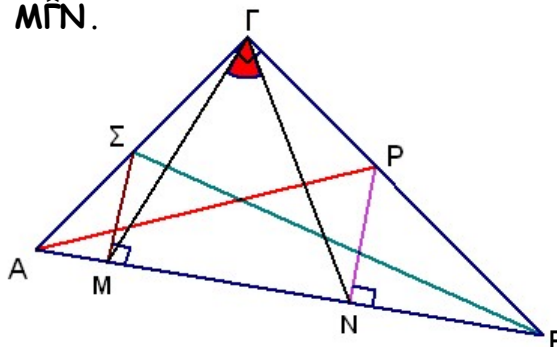


33. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) . Οι εσωτερικές διχοτόμοι

των γωνιών $\hat{BAG}$ και $\hat{AB\Gamma}$ τέμνουν τις $B\Gamma$ και $A\Gamma$ στα P και Σ αντίστοιχα.

Αν M και N τα ίχνη των καθέτων από τα P και Σ στην AB , να

υπολογίσετε την γωνία $\hat{M\Gamma N}$.



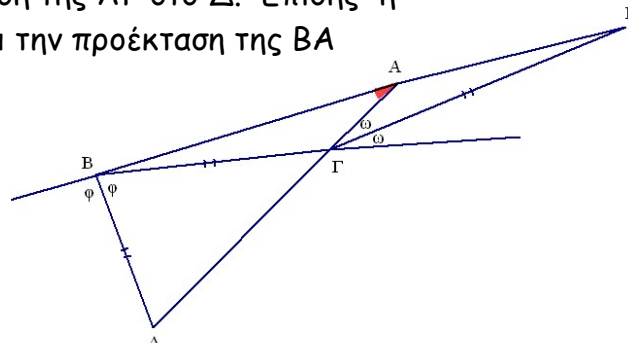
(" Ξ 4/ 228 ")



*** Β' ΟΜΑΔΑ ***

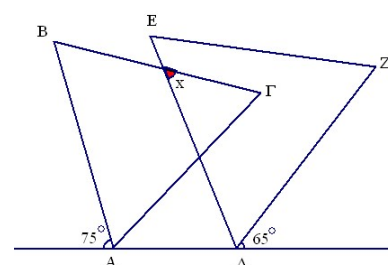
1. Στο διπλανό σχήμα η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ (με $AB > BG > GA$), τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ. Επίσης η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Γ τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ε. Αν είναι $BD = BG = GE$,
να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ του $\triangle ABG$.

(" # 1/ 153 ")



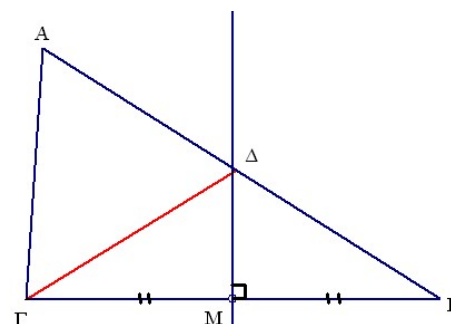
2. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ
είναι ισόπλευρα . πόσες μοίρες είναι η γωνία x ;

(" # 4/ 169 ")

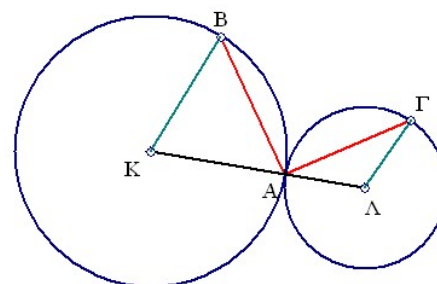


3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 3 \cdot \hat{B}$.
Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει
την ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι :

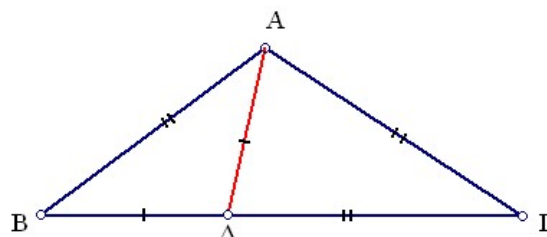
- α) το τρίγωνο $\triangle B\Gamma$ είναι ισοσκελές .
- β) το τρίγωνο $\triangle A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές



4. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται
εξωτερικά στο Α. Δύο χορδές αυτών ΑΒ και
ΑΓ αντίστοιχα είναι κάθετες . Να δείξετε ότι:
 $KB \parallel \Lambda\Gamma$.



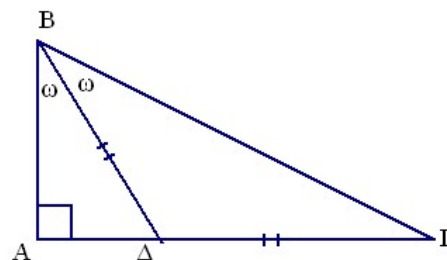
5. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$,
 $\Delta A = \Delta B$ και $\Gamma A = \Gamma \Delta$. Να υπολογίσετε τις
γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.





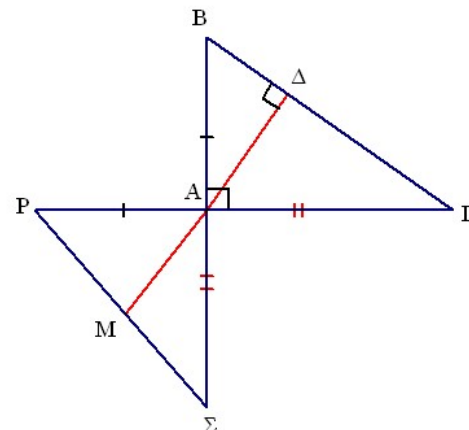
6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

φέρουμε τη διχοτόμο $B\Delta$ και. Αν $B\Delta = \Delta\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



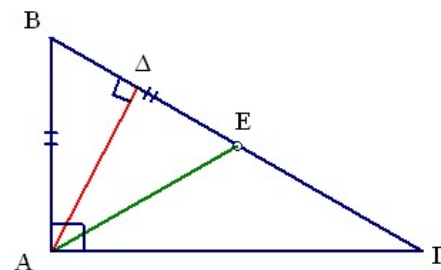
7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A κατά $AS = A\Gamma$ και την πλευρά ΓA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AP = AB$. Να δείξετε ότι η προέκταση του ύψους $A\Delta$ διχοτομεί το τμήμα SP .



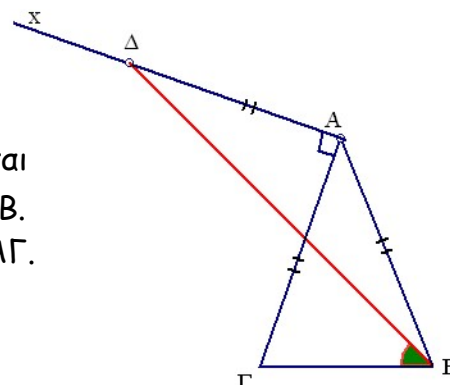
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$),

το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BE = BA$. Να δείξετε ότι η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma A \Delta}$.



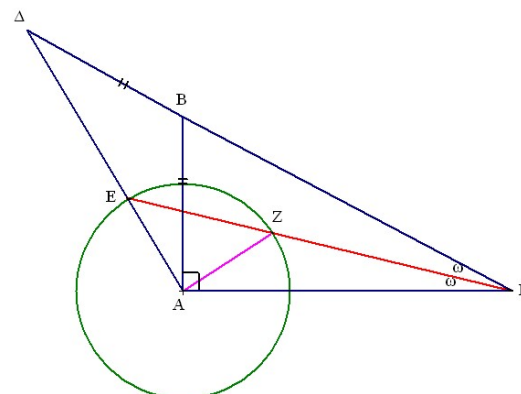
9. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

φέρουμε την ημιευθεία $Ax \perp A\Gamma$, η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της $A\Gamma$ που δεν ανήκει το σημείο B . Στην Ax παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta B \Gamma}$



10. Προεκτείνουμε την υποτεινούσα ΓB ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) κατά τμήμα

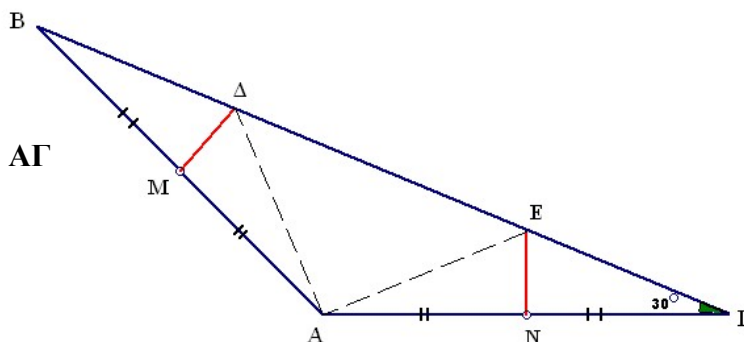
$B\Delta = BA$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την $A\Delta$ στο E . Ο κύκλος με κέντρο A και ακτίνα AE τέμνει ξανά την $E\Gamma$ στο Z . Να δείξετε ότι η EZ χωρίζει τον κύκλο σε δύο τόξα από τα οποία το ένα είναι τριπλάσιο του άλλου.



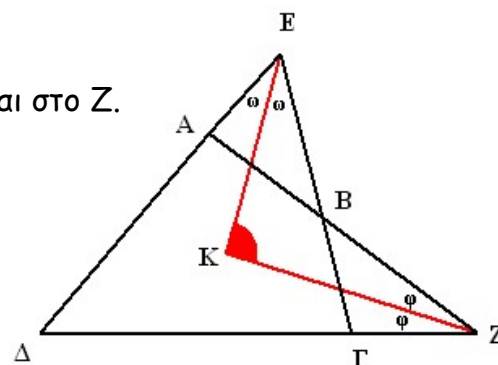


11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν M και N τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα και $M\Delta \perp AB$, $NE \perp A\Gamma$, να δείξετε ότι :

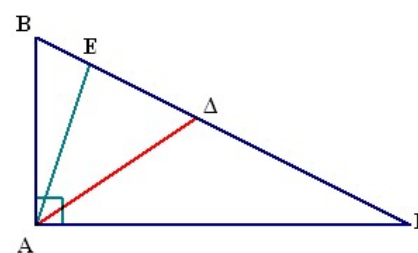
- α) $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$
β) $BA \perp AE$ και $AA \perp A\Gamma$



12. Οι πλευρές ΔA και ΓB ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο Z . Οι διχοτόμοι των $\hat{E}$ και $\hat{Z}$ τέμνονται στο σημείο K . Να δείξετε ότι : $\hat{E}KZ = \frac{\hat{B} + \hat{\Delta}}{2}$

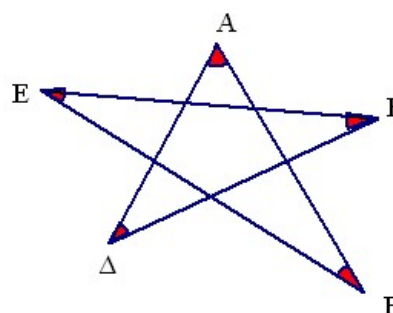


13. Στην υποτείνουσα $B\Gamma$ ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $B\Delta = BA$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Να υπολογίσετε την γωνία $\Delta\hat{A}E$.



14. Να δείξετε ότι στο διπλανό σχήμα ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ$$



15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΔEZ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι :

$$\hat{x} = \frac{\hat{y} + \omega}{2}$$

