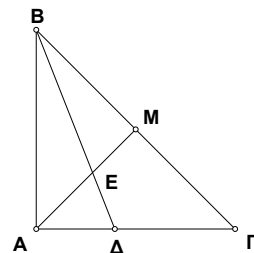
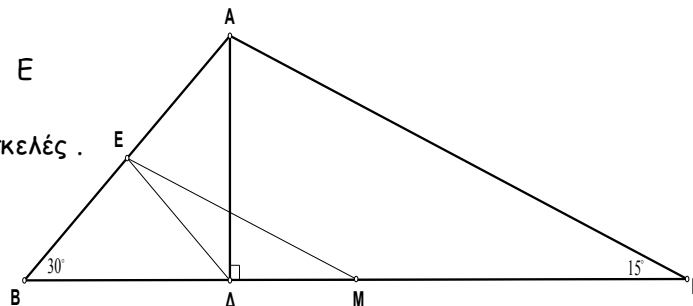


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ - ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ , ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ - ΙΔΙΟΤΗΤΑ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

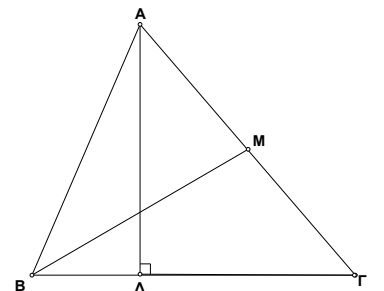
1. Έστω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).
Η διάμεσός του AM και η διχοτόμος του $B\Delta$ τέμνονται στο E .
Να δείξετε ότι : $\Delta\Gamma = 2 EM$
(ΥΠΟΔ. Φέρτε $MZ \parallel \Delta\Gamma$)



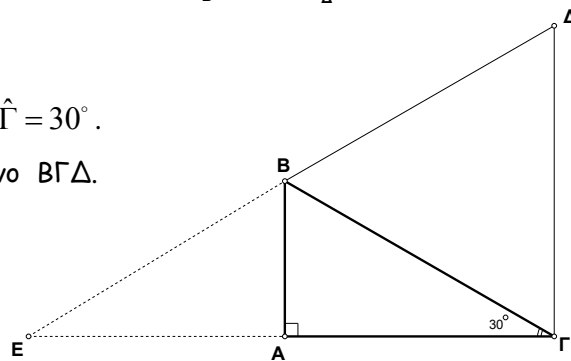
2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 15^\circ$.
Αν AM διάμεσος, $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου και E
το μέσο του AB τότε :
α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές .
β. Να υπολογίσετε την γωνία $\Delta\hat{A}M$.



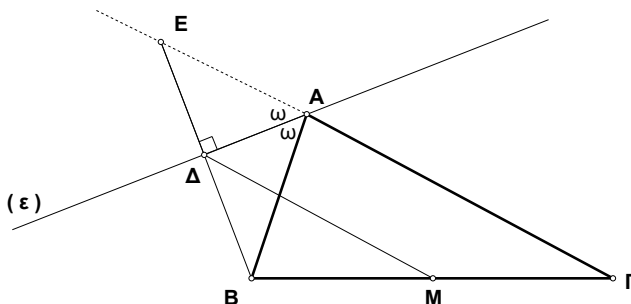
3. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και την
διάμεσο BM . Αν $A\Delta = BM$, να υπολογίσετε την γωνία $M\hat{B}\Gamma$.
(υποδ. Φέρνω την κάθετη από το M στην $B\Gamma$)



4. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
Έξω από αυτό κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$.
Οι ευθείες $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο E .
α. Να δείξετε ότι : $AB \parallel \Gamma\Delta$
β. Το A είναι μέσο του τμήματος $E\Gamma$



5. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$ και ευθεία (ϵ) που περιέχει
τη διχοτόμο της εξωτερικής του γωνίας στο A . Η κάθετος από το B προς την (ϵ) τέμνει
αυτή στο Δ και την ευθεία $A\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι:
α. $AB = AE$
β. $M\Delta \parallel A\Gamma$
γ. $M\Delta = \frac{AB + A\Gamma}{2}$

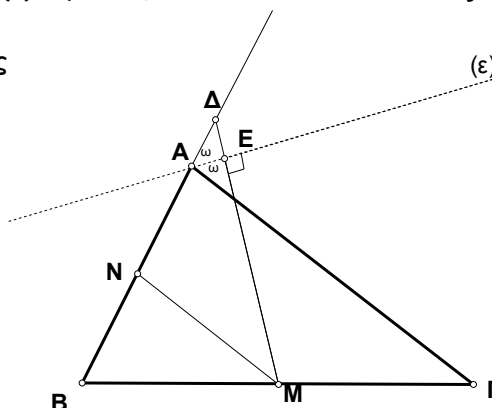


6. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$, το μέσο N της πλευράς του AB και την ευθεία (ε) που περιέχει τη διχοτόμο της εξωτερικής του γωνίας στο A . Η κάθετος από το M προς την (ε) τέμνει την ευθεία AB στο Δ . Να δείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $M\Delta N$ είναι ισοσκελές

β. $N\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$

γ. $A\Delta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$



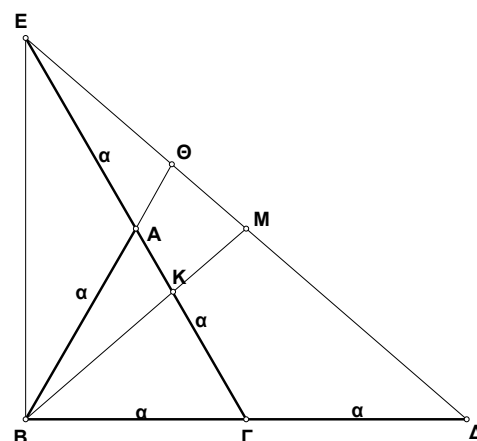
7. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε τις $B\Gamma$, ΓA κατά τμήματα $\Gamma\Delta = AE = \alpha$. Η προέκταση της BA τέμνει την $E\Delta$ στο Θ . Αν M το μέσο της $E\Delta$ και K το σημείο τομής της $E\Gamma$ με την BM τότε:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) $AK = \frac{\alpha}{3}$

γ) τα τρίγωνα EKB και $E\Theta B$ είναι ίσα

δ) $AB = 3 \cdot A\Theta$

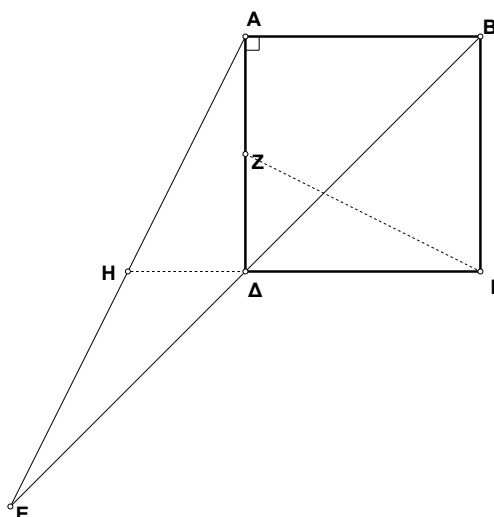


8. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με Z μέσο της $A\Delta$. Προεκτείνουμε την διαγώνιο $B\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H , να δείξετε ότι :

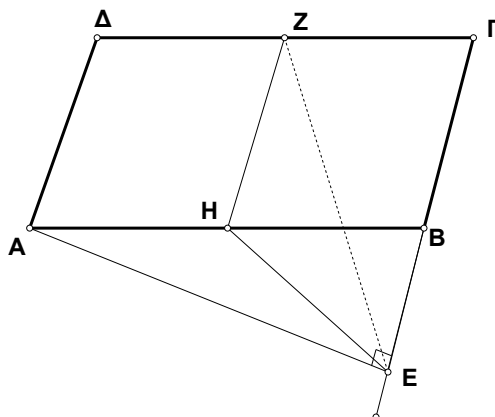
α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

β) $Z\Gamma = AH$

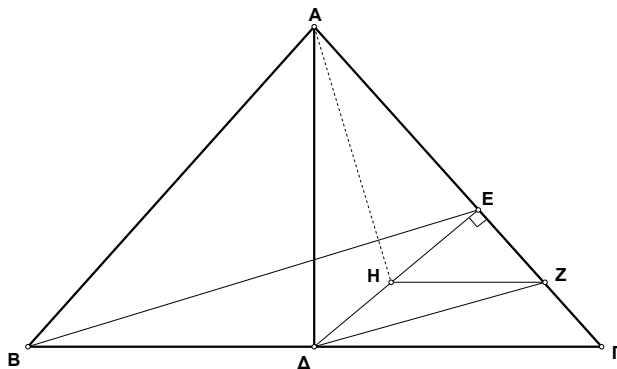
γ) $\Gamma Z \perp AE$



9. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2 \cdot B\Gamma$ και $\hat{B} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα $AE \perp B\Gamma$ (το E βρίσκεται στη προέκταση του $B\Gamma$) και έστω Z το μέσο του $\Gamma\Delta$ και H το μέσο του AB . Να δείξετε ότι :
- το $HB\Gamma Z$ είναι ρόμβος .
 - $HZ = HE = HB$
 - η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{H}\epsilon\Gamma$.

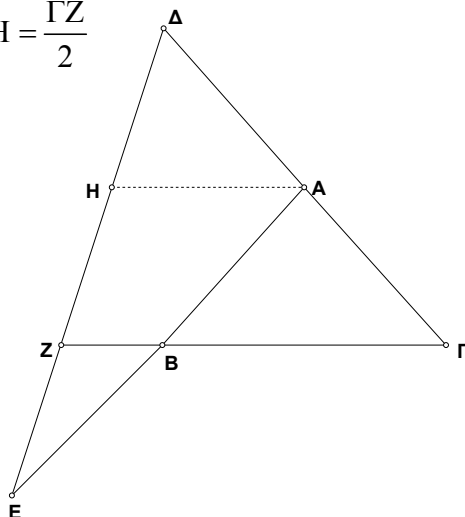


10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και Δ το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Delta E \perp A\Gamma$ και έστω Z το μέσο του $E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :
- $\Delta Z \parallel BE$
 - Αν H το μέσο του ΔE τότε $ZH \perp A\Delta$
 - $AH \perp BE$



11. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΓA προς το A και παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B και παίρνουμε τμήμα $BE = AB$. Η ευθεία $B\Gamma$ τέμνει την ευθεία ΔE στο σημείο Z .

- Να δείξετε ότι αν H το μέσο της ΔZ τότε : $AH = \frac{\Gamma Z}{2}$
- Να δείξετε ότι $EH = 2 \cdot EZ$
- Να δείξετε ότι:

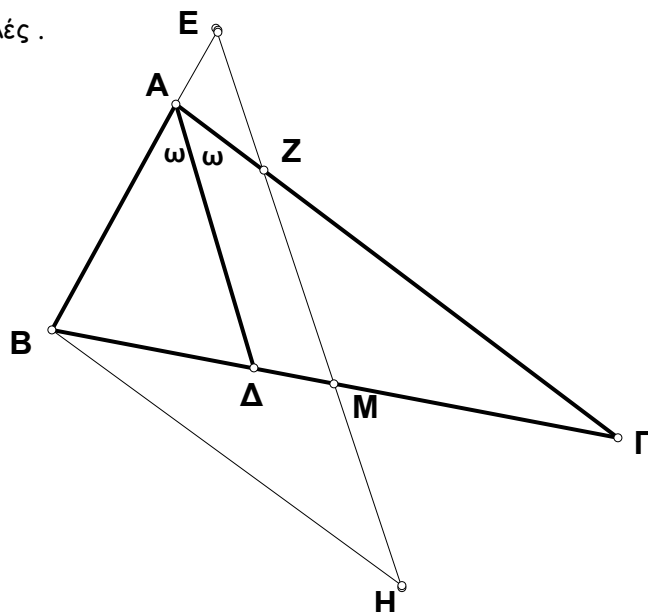


12. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και τη διχοτόμο του $A\Delta$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρνουμε την παράλληλη προς την $A\Delta$, η οποία τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E και την $A\Gamma$ στο Z . Από το B φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την EM στο H .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEH είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $MZ\Gamma$ και BMH είναι ίσα.

γ. $BE = \Gamma Z = \frac{AB + A\Gamma}{2}$



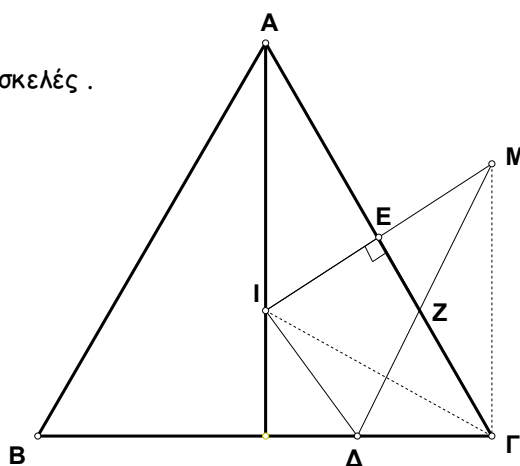
13. Έστω I το έγκεντρο ενός ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ και M το συμμετρικό του I ως προς την ευθεία $A\Gamma$. Η παράλληλη από το M προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και την $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΓMI είναι ισοσκελές.

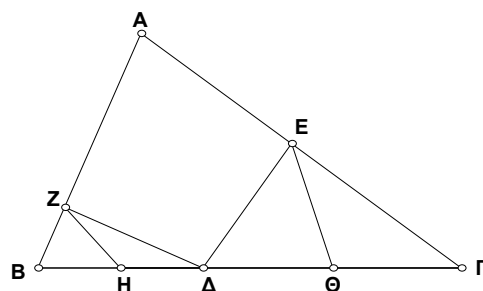
β. Η γωνία $\widehat{M\Gamma\Delta}$ είναι ορθή.

γ. Το σημείο Z είναι μέσο του $M\Delta$.

δ. $MI \perp I\Delta$

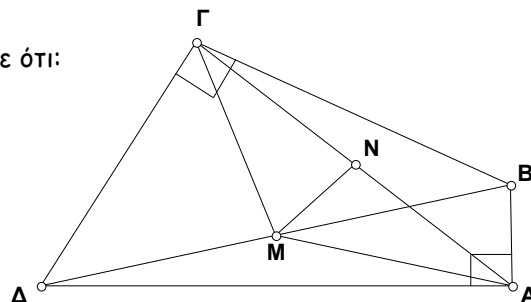


14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Delta Z \perp AB$ και $\Delta E \perp A\Gamma$. Αν H και Θ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα δείξτε ότι:
 $2(ZH + E\Theta) = B\Gamma$

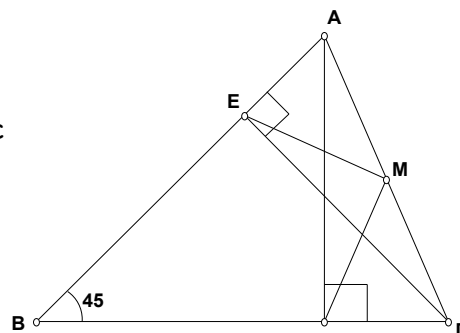


15. Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A=\Gamma=90^\circ$. Αν M είναι το μέσο της $B\Delta$ και N το μέσο της $A\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

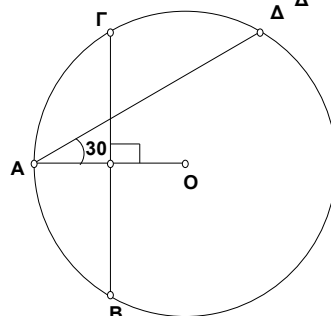
- i) Το τρίγωνο $MA\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- ii) $A\Gamma \leq B\Delta$
- iii) $MN \perp A\Gamma$



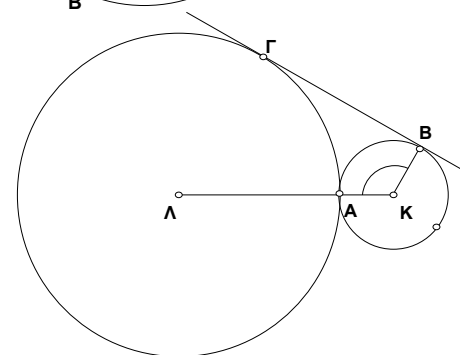
16. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία B είναι 45° . Αν $A\Delta$ και ΓE τα δύο ύψη του τριγώνου και M το μέσο της $A\Gamma$ να αποδείξετε ότι $ME \perp M\Delta$



17. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε μια ακτίνα OA , μια χορδή $B\Gamma$ που είναι μεσοκάθετος της ακτίνας αυτής, και μια ακόμη χορδή $A\Delta$ που σχηματίζει με την OA γωνία 30° . Δείξτε ότι $A\Delta = B\Gamma$.

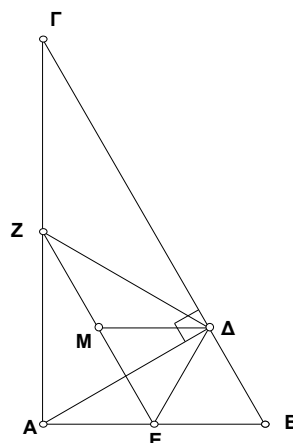


18. Δύο κύκλοι (K,R) και $(\Lambda,3R)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Αν $B\Gamma$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους να αποδείξετε ότι η γωνία $B\Lambda\Gamma$ είναι 120° .

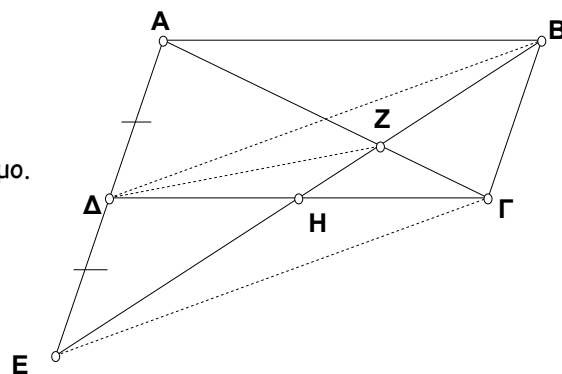


19. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $Z\Delta E$:

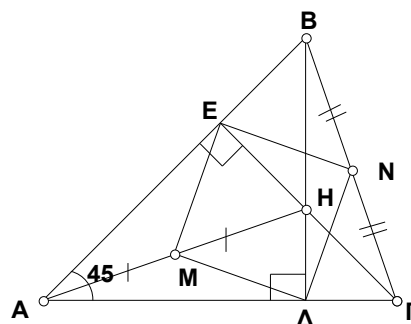
- i) Είναι ορθογώνιο.
- ii) Έχει περίμετρο την ημιπερίμετρο του $AB\Gamma$.
- iii) Έχει διάμεσο ΔM ίση με $\frac{1}{4}B\Gamma$
- iv) Αν επί πλέον $\Gamma=30^\circ$ να αποδείξετε ότι $\Delta E = \frac{1}{4}B\Gamma$



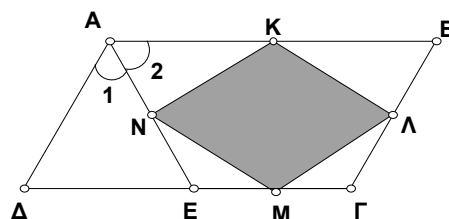
20. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Αν η BE τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z και τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H , να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - $\Delta H = H\Gamma$
 - Η ΔZ περνάει από το μέσο της $B\Gamma$.



21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $A = 45^\circ$, τα ύψη $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H , το μέσο M του AH και το μέσο N του $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- $EN = \Delta N$
 - $EM = M\Delta$
 - Τα τρίγωνα $AH\Delta$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
 - Το τετράπλευρο ΔMEN είναι ρόμβος.



22. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A διπλάσια της γωνίας B . Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο E . Να αποδείξετε ότι τα μέσα K, Λ, M και N των τμημάτων $AB, B\Gamma, \Gamma E$ και $A\Gamma$ είναι κορυφές ρόμβου.



23. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$). Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma\Theta$. Φέρουμε την EK κάθετη στη $B\Gamma$, την $H\Lambda$ κάθετη στη $B\Gamma$ και την $A\Delta$ κάθετη στη $B\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
- Τα σημεία E, A και H είναι συνευθειακά.
 - Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και EKB είναι ίσα.
 - Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $H\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.
 - $KB = \Lambda\Gamma$
 - $EK + H\Lambda = B\Gamma$
 - Η γωνία $B\Gamma M$ είναι ορθή.

