



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ- ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ »

Θέμα 1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα. β) $EH = \Delta Z$.

Θέμα 2 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $MK = M\Lambda$. β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{M}\Lambda$.

Θέμα 3 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές. β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες.
γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

Θέμα 4 Εστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

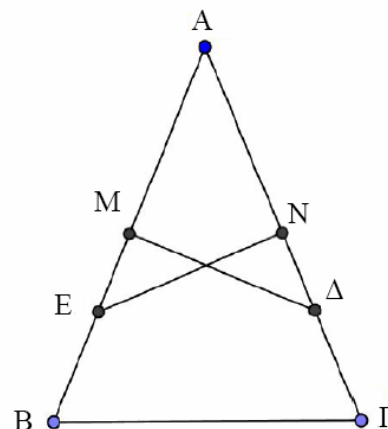
- α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Θέμα 5 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα. β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.

Θέμα 6 Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

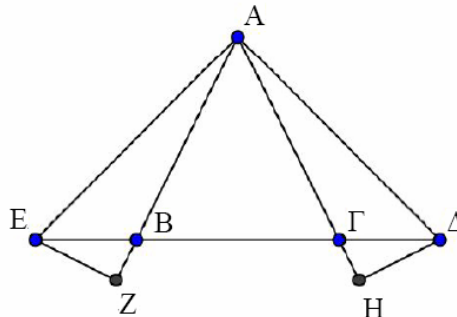
- α) Αν $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.





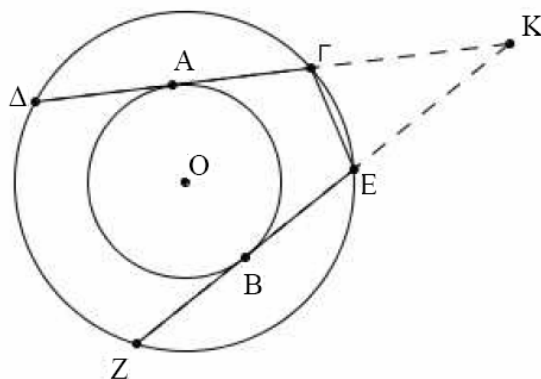
Θέμα 7 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Delta = AE$.
- β) $EZ = \Delta H$.



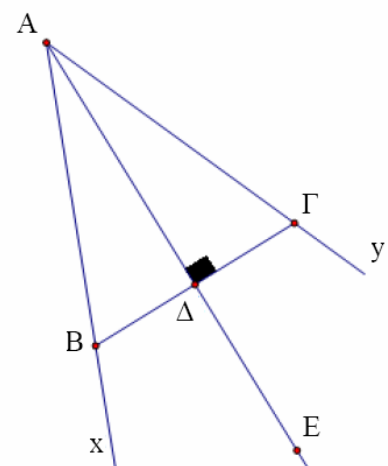
Θέμα 8 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.
- β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές.



Θέμα 9 Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

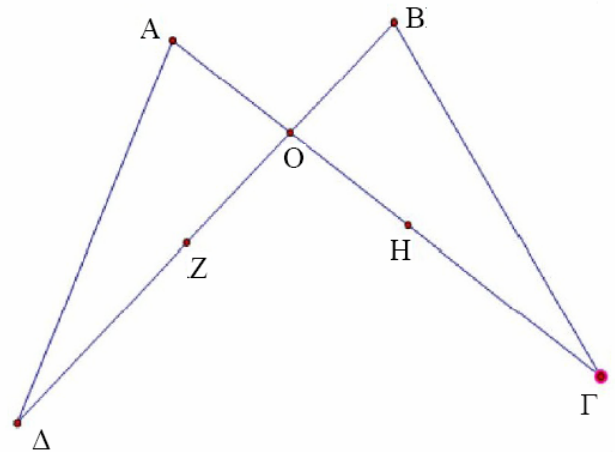
- α) Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
- β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .





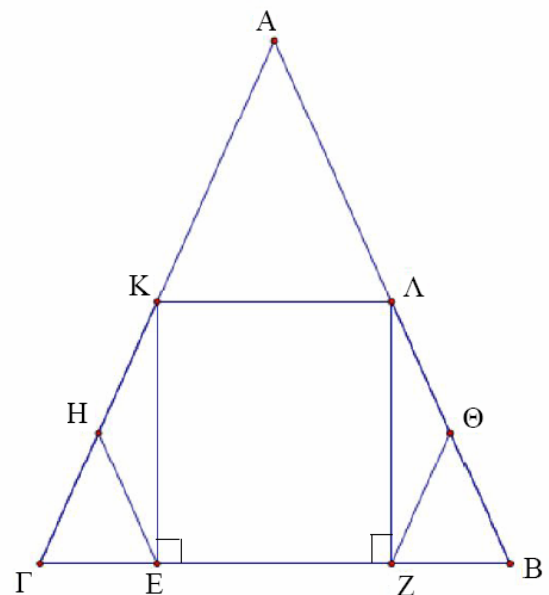
Θέμα 10 Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο $Ο$ έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$, και τα σημεία $Η$ και $Ζ$ στα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες $ΑΔΟ$ και $ΒΓΟ$ είναι ίσες.
- $AZ = BH$.



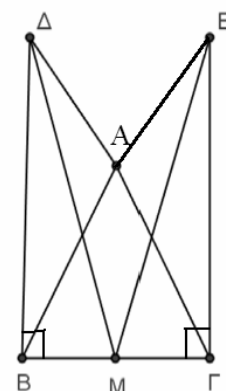
Θέμα 11 Εστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από τα μέσα $Κ$ και $Λ$ των πλευρών $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα $ΚΕ$ και $ΛΖ$ στην πλευρά $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $ΚΕΓ$ και $ΛΖΒ$ είναι ίσα.
- $ΕΗ = ΖΘ$, όπου $Η, Θ$ τα μέσα των τμημάτων $ΚΓ, ΛΒ$ αντίστοιχα.



Θέμα 12 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Στα σημεία $Β$ και $Γ$ της $ΒΓ$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $ΒΓ$, τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

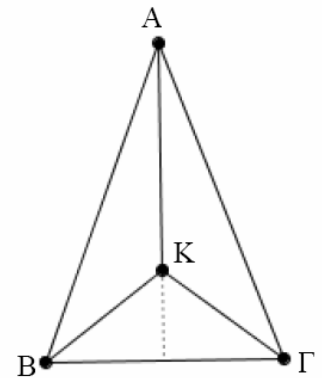
- Τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΓΕΜ$ είναι ίσα.
- $ΑΔ = ΑΕ$.





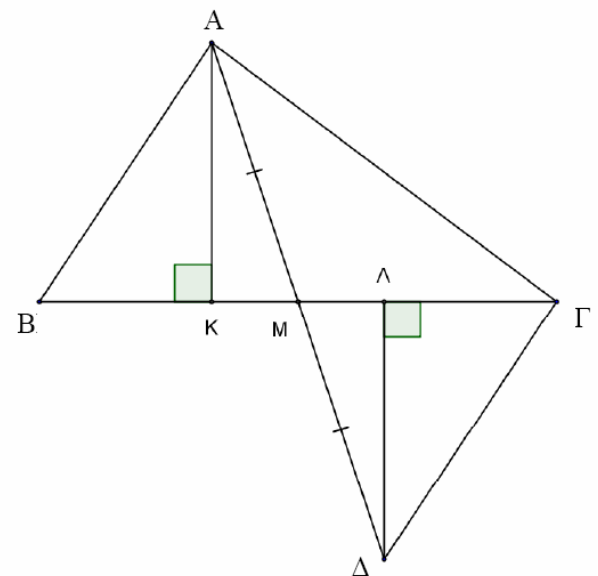
Θέμα 13 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
- Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.
- Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$ του τριγώνου $BK\Gamma$.



Θέμα 14 Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.



Θέμα 15 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές.
- Η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$.

