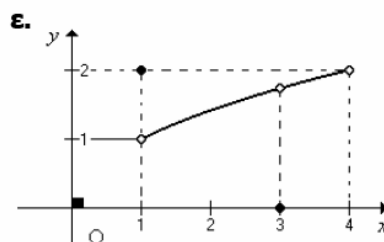
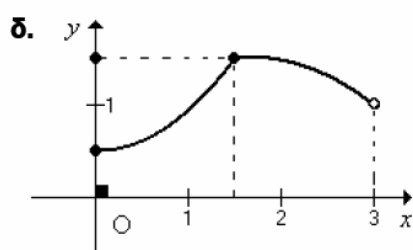
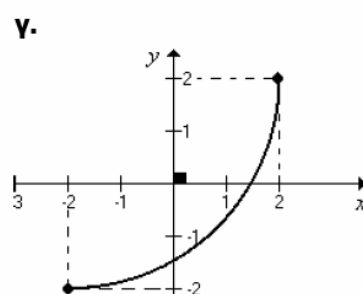
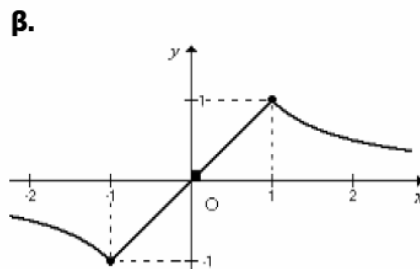
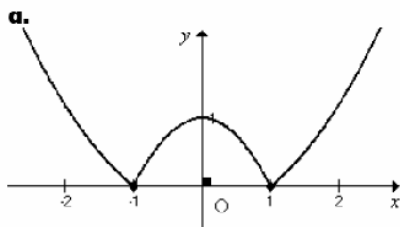




ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Μονοτονία – Ακρότατα Συνάρτησης »

1. Να βρείτε τα ακρότατα και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων των παρακάτω συναρτήσεων :



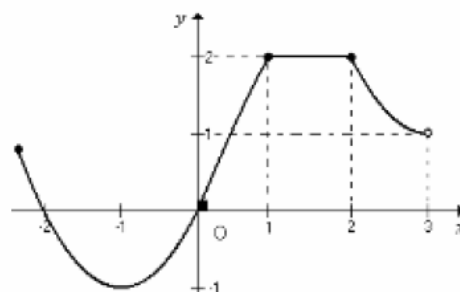
2. Στο παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η f είναι :

- i. γνησίως αύξουσα ,
- ii. γνησίως φθίνουσα ,
- iii. σταθερή .

δ. Να βρείτε τα ακρότατα της f και τις τιμές του x που τα παρουσιάζει .



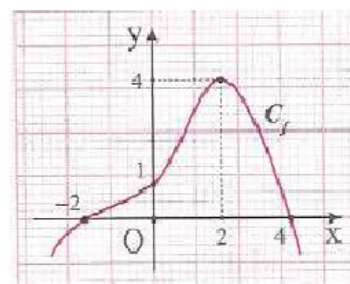
3. Στο παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η f είναι :

- i. γνησίως αύξουσα , ii. γνησίως φθίνουσα .

δ. Να βρείτε τα ακρότατα της f και τις τιμές του x που τα παρουσιάζει .





4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1 = 1$ και ελάχιστο για $x_2 = -1$.

6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

8. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^3 + 3$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f στα διαστήματα $[-3, 0]$ και $[0, 3]$.

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f και τα σημεία που τα παρουσιάζει.

10. Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

α. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$

β. $f(x) = x - 5 + \frac{1}{x - 5}$, $x > 5$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x}$. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f .

12. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει μέγιστο το 5.

Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = 2 - 3f(x)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \sqrt{x - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f . δ. Να βρείτε το $f(5)$ και να λύσετε : ι. την εξίσωση $f(x) = 27$.

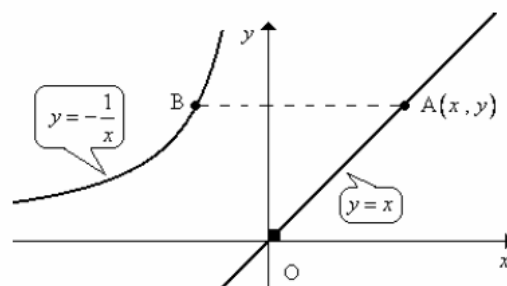
ii. την ανίσωση $f(x) > 27$.

ε. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{2010}{2009}\right) - 1 > 0$.

14. α. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και να βρείτε την τιμή του x που το παρουσιάζει.

β. Στο σχήμα να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση (AB).

γ. Να βρείτε την τιμή του x που η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη καθώς επίσης και τα A και B.





ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Άρτια – Περιττή συνάρτηση »

1. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 2x$	β. $f(x) = 2009 x - 2$	γ. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	δ. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x - 1 }$
ε. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$	στ. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$	ζ. $f(x) = x - 1 + x + 1 $	η. $f(x) = 5x^6 - 2x^2 + 3$
θ. $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$	ι. $f(x) = x^3 - 3x x + 2x$	κ. $f(x) = 3x - 2 + 3x + 2 $	

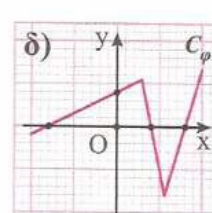
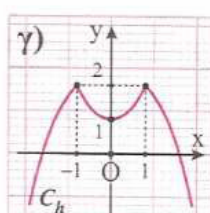
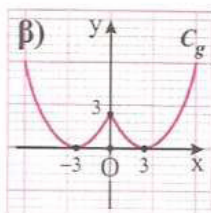
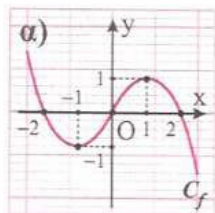
2. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$	β. $f(x) = ax^4 + bx^2 + \gamma$	γ. $f(x) = \frac{x^3}{ x - 1}$	δ. $f(x) = \frac{3 x + 2}{x^3 - x}$
ε. $f(x) = \frac{x x }{1 + x^2}$	στ. $f(x) = \frac{2x - x^3}{1 - x^2}$	ζ. $f(x) = \frac{ x }{1 + x^2}$	η. $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^4}$
θ. $f(x) = \frac{x^2 + x }{x}$	ι. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$	κ. $f(x) = \frac{x^3 - x x }{x^2 + 1}$	

3. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον $y'y$ ή κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$:

α. $f(x) = \frac{ x - 2 - x + 2 }{ x - 1 + x + 1 }$	β. $f : (-2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 3x^2$	γ. $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 1$
δ. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	ε. $f(x) = \frac{-x^3 + x}{1 + x }$	στ. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης .



5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x| + 1}{x - \frac{1}{x}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή .



6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3|x|-2}{\frac{1}{x}-x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}+1}{|x|-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2-1}+5|x|$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

10. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και τα σημεία $A(-1,-2)$, $B(1,a)$ ανήκουν στην γραφική της παράσταση, να βρείτε το a .

11. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(3,-2)$, $B(-3,\lambda)$ ανήκουν στην γραφική της παράσταση, να βρείτε το λ .

12. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι περιττή και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ να δείξετε ότι $f(0)-f(2)=3$.

13. Αν η συνάρτηση $f:(2\lambda,3\lambda+1)\rightarrow\mathbb{R}$ είναι περιττή, να βρείτε το λ .

14. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|-2f(x^2)-x^2+1$ είναι άρτια.

15. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\frac{|f(x)|}{f(|x|)}$ είναι άρτια.

16. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι περιττή να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(|x|)\cdot|f(x)|$ είναι άρτια.

17. Έστω η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)-2x|f(x^3)|$, $x\in\mathbb{R}$ είναι περιττή.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

(ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

α) $f(x) = 1 - |x|$, β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, γ) $f(x) = x \cdot |x|$, δ) $f(x) = \frac{x^{2025}}{x^2 - 1}$,

ε) $f(x) = \frac{x^{2024}}{x + 3}$, στ) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x < 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ η) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

2) Όμοια και για τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{-x^3 + x}{|x| - 2}$, β) $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x \leq -2 \\ 3x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$, γ) $f(x) = \frac{|x| + 1}{-x + \frac{1}{x}}$, δ) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{x}$

3) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις: α) $f(x) = x - \frac{1}{x^3}$ και β) $g(x) = \frac{1 - x^4}{x^2}$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$.

α) Να γραφεί η συνάρτηση χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να γίνει η γραφική της παράσταση

δ) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f.

5) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 3}$

6) Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(-1, 2) και B(1, -4), να βρεθεί η μονοτονία της και να συγκριθούν οι αριθμοί f(24) και f(25).

7) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ και στο $x_0 = 1$ έχει μέγιστο το $f(1) = 2014$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το οποίο και να βρεθεί.

8) Να βρεθεί η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης καθώς η θέση ελαχίστου ή μεγίστου.

α) $f(x) = (x-1)^2 + 2$, β) $f(x) = |4-x| - 1$, γ) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 16} - 3$

9) Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

α) $f(x) = -2(x+3)^2 + 1$, β) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, γ) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 4$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

γ) Στην συνέχεια να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της καθώς και τα ακρότατα της, αν υπάρχουν.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.



12) Αν είναι γνωστό ότι η f είναι περιττή να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3			2	

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5-|x|} + \frac{x^2}{x^2-4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

14) Α) Η συνάρτηση f είναι άρτια και $2 \cdot f(1) + f(-2) = 4$. Τότε η παράσταση $\Sigma = 3 \cdot f(2) + 6 \cdot f(1)$ είναι ίση με :

α. 12 , β. -12 , γ. 4 , δ. 0

Β) Η συνάρτηση g ορίζεται στο διάστημα $[3\lambda - 2, 4 + \lambda]$. Αν η g είναι περιττή τότε πρέπει:

α. $\lambda = -3$, β. $\lambda = 3$, γ. $\lambda = -\frac{1}{2}$, δ. $\lambda \in \mathbb{R}$

15) Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ γράφεται πάντα σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης

16) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(8) = 4$, να λυθεί η ανίσωση: $f(x^2 - 1) > 4$

17) Η συνάρτηση f είναι άρτια, συνάρτηση g είναι περιττή και ισχύει: $3g(2) + 2f(5) = f(-5) - 3g(-2) + 6$.

Να υπολογίσετε το $f(5)$

18) Η συνάρτηση f είναι άρτια και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + 4x = f(-2x)$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$, να βρεθεί το $f(2)$.

19) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + 8x^4 = 6x^2 - f(-x) + 4$. Να βρεθεί το $f(1)$.

20) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x|}$ έχει ελάχιστη τιμή το 2.

21) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. Β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| \geq \frac{1}{2}$

22) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση στο $(-\infty, 0]$ μιας περιττής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Α) Να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση.

Β) Να βρεθούν τα διαστήματα μονotonίας της.

Γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Δ) Να βρεθούν τα ακρότατα της και οι θέσεις των ακρότατων αυτών.

