

**ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**
(ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

α) $f(x) = 1 - |x|$, **β)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, **γ)** $f(x) = x \cdot |x|$, **δ)** $f(x) = \frac{x^{2025}}{x^2 - 1}$,

ε) $f(x) = \frac{x^{2024}}{x + 3}$, **στ)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x < 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ **η)** $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

2) Όμοια και για τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{-x^3 + x}{|x| - 2}$, **β)** $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x \leq -2 \\ 3x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$, **γ)** $f(x) = \frac{|x| + 1}{-x + \frac{1}{x}}$, **δ)** $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{x}$

3) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x - \frac{1}{x^3}$ **και β)** $g(x) = \frac{1 - x^4}{x^2}$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$.

- α)** Να γραφεί η συνάρτηση χωρίς τις απόλυτες τιμές.
β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να γίνει η γραφική της παράσταση
δ) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f.

5) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 3}$

6) Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(-1, 2) και B(1, -4), να βρεθεί η μονοτονία της και να συγκριθούν οι αριθμοί f(2024) και f(2025).

7) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ και στο $x_0 = 1$ έχει μέγιστο το $f(1) = 2014$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το οποίο και να βρεθεί.

8) Να βρεθεί η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης καθώς η θέση ελαχίστου ή μεγίστου.

α) $f(x) = (x-1)^2 + 2$, **β)** $f(x) = |4-x| - 1$, **γ)** $f(x) = -\sqrt{x^2 + 16} - 3$



9) Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

α) $f(x) = -2(x+3)^2 + 1$, β) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, γ) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 4$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

γ) Στην συνέχεια να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της καθώς και τα ακρότατα της , αν υπάρχουν.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

12) Αν είναι γνωστό ότι η f είναι περιττή να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3			2	

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5-|x|} + \frac{x^2}{x^2-4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

14) Α) Η συνάρτηση f είναι άρτια και $2 \cdot f(1) + f(-2) = 4$. Τότε η παράσταση

$\Sigma = 3 \cdot f(2) + 6 \cdot f(1)$ είναι ίση με : α. 12 , β. -12 , γ. 4 , δ. 0

Β) Η συνάρτηση g ορίζεται στο διάστημα $[3\lambda - 2, 4 + \lambda]$. Αν η g είναι

περιττή τότε πρέπει: α. $\lambda = -3$, β. $\lambda = 3$, γ. $\lambda = -\frac{1}{2}$, δ. $\lambda \in \mathbb{R}$

15) Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ γράφεται πάντα σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης

16) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(8) = 4$, να λυθεί η ανίσωση:

$$f(x^2 - 1) > 4$$

17) Η συνάρτηση f είναι άρτια , συνάρτηση g είναι περιττή και ισχύει :

$$3g(2) + 2f(5) = f(-5) - 3g(-2) + 6. \text{ Να υπολογίσετε το } f(5)$$

18) Η συνάρτηση f είναι άρτια και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x) + 4x = f(-2x)$. Αν η

γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$, να βρεθεί το $f(2)$.



19) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + 8x^4 = 6x^2 - f(-x) + 4$. Να βρεθεί το $f(1)$.

20) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x|}$ έχει ελάχιστη τιμή το 2.

21) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

B) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| \geq \frac{1}{2}$

22) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση στο $(-\infty, 0]$ μιας περιττής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

A) Να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση.

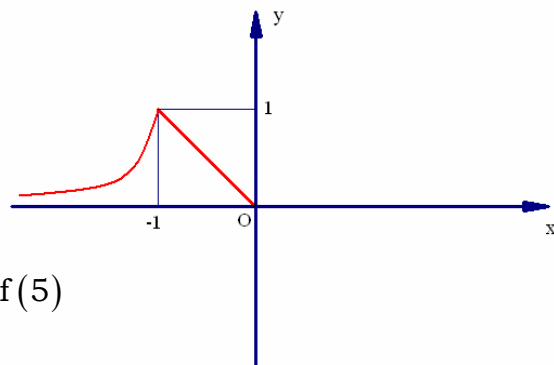
B) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της.

Γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Δ) Να βρεθούν τα ακρότατα της και οι θέσεις των ακρότατων αυτών.

Ε) Να συγκριθούν από άποψη μεγέθους οι αριθμοί:

α) $f(-4)$, $f(-3)$ β) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ και γ) $f(4)$, $f(5)$



23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(\lambda - 1) \cdot x^2} + 1$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί το λ

B) Αν το σημείο $\Sigma(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να υπολογίσετε το λ .

Γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f . Είναι η f άρτια;

24) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = -x^4 + 7$ **β)** $f(x) = x^{2023} + x + 2$ **γ)** $f(x) = (x - 4)^{2024} - 2025$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x + 3, & x > 0 \end{cases}$ **ε)** $f(x) = 3 - \sqrt[5]{16 - (x - 1)^4}$