



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

- Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda^2 - \lambda)x - \lambda^3 + 1$ Να βρείτε το λ ώστε το $P(x)$ να είναι:
α. σταθερό πολυώνυμο β. μηδενικό πολυώνυμο γ. μηδενικού βαθμού
- Να δείξετε ότι το πολυώνυμο : $P(x) = \alpha^2 x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha - 1)x + 2$ δεν έχει ρίζα το -1 για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το -2 να δείξετε ότι το πολυώνυμο: $Q(x) = 2P(3x + 1) + (x^2 + x) \cdot P(x + 1)$ έχει ρίζα το -1.
- Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(-1) = 2$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x^2 - 3x - 5) + 3P(x + 4) + 3xP(1 - 2x) - 2$ έχει ρίζα το -1.
- Να βρείτε τα α, β ώστε το $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$ να παίρνει τη μορφή $(\alpha x + \beta)(x^2 - 3)$
- Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς 0, -2 και να ισχύει $P(-1) = 3$.
- Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $[P(x)]^2 + 2P(x) = 4x^2 - 1$
- Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^3 - \lambda)x + \lambda - 1$. Να βρείτε το λ ώστε το $P(x)$:
α. να έχει ρίζα τον αριθμό -1. β. να είναι μηδενικό πολυώνυμο. γ. να είναι μηδενικού αριθμού.
- Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 2\alpha x + 1$, $Q(x) = x^2 - x + 1$ και $H(x)$ για τα οποία ισχύει: $Q(x) \cdot H(x) = P(x)$.
α. Να βρείτε τον βαθμό του $H(x)$. β. Να βρείτε το α και το $H(x)$.
γ. Να βρείτε το κ ώστε το πολυώνυμο: $P(P(\kappa x))$ να έχει ρίζα το -1.
- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και για το πολυώνυμο $Q(x)$ ισχύει: $Q(x) = (2x^2 - x - 1) \cdot P(x) - 3P(3x - 2)$
α. να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών του $Q(x)$ β. να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(3x - 5)$ έχει ρίζα το 2.
- Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 1$ είναι $2x + 1$ και το $P(x)$ έχει ρίζα το 0. Να βρείτε:
i. το $P(1)$. ii. το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x$.
- Να βρείτε το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + 2\lambda x - \lambda + 2$ με το $x + 3\lambda$ να είναι $7 - 3\lambda$.
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x + 2$ είναι 2 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $Q(x) = P(9x + 7) + x^3 - 10$ με το $x + 1$.
- Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $P(2x + 1) = x^2 - 3x + 2$ να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
- Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = -2(x + 5)^{21} + 3(x + 4)^{17} - x - 2$ έχει ως παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x) = x^2 + 9x + 20$.
- Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 - 2\alpha x + \beta^2 - 1$ το οποίο έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 3.
α. Να βρείτε τα α και β . β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
- Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει βαθμό 3. Αν διαιρέσουμε το $P(x)$ με το $x^2 - 2x$ βρίσκουμε υπόλοιπο $2x - 1$.
α. Να βρείτε τα $P(0)$ και $P(2)$.
β. Έστω $3x - 2$ το υπόλοιπο και $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $3x^2 - 4x + 1$
i. Να βρείτε το βαθμό του $\pi(x)$ ii. Να βρείτε το $\pi(x)$



18. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(3x - 4)$ με το $x - 2$ είναι 1 και η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι περιπτή.
- α. Να βρείτε τα: $P(0)$, $P(2)$, $P(-2)$ β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 - 4x$
19. Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $2x^4 - x^3 - 16x + 8 = 0$ ii. $3x^5 - 2x^4 - 3x + 2 = 0$
20. Αν ο αριθμός $3\lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ είναι ακέραια ρίζα της εξίσωσης: $2x^5 - \alpha x - 1 = 0$, να βρείτε το λ .
21. Αν η εξίσωση $(2\kappa - 3)x^3 - \kappa x - 1 = 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχει θετική ακέραια ρίζα, να βρείτε το κ .
22. Αν η εξίσωση: $x^3 \eta \mu \theta + 10x^2 + (3\alpha - 1)x + 2 = 0$, $\theta \in (0, \pi)$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και τον αρνητικό περιττό ακέραιο ρ ως ρίζα, να βρείτε τα θ και α .
23. Να λυθούν οι εξισώσεις:
- i. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ ii. $2x^3 - x - 1 = 0$ iii. $x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$ iv. $x^3 + 3 = 2x(1 - x)$
24. Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $x^9 + x^6 - 2 = 0$ ii. $x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
25. Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$ ii. $(2x + 3)^8 - 80(2x + 3)^4 - 81 = 0$
26. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{2x}{3x-1}\right)^6 + 7\left[\frac{2x}{3x-1}\right]^3 - 8 = 0$
27. Να λύσετε τις ανισώσεις: i. $-x^3 + 3x + 2 < 0$ ii. $4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - x \geq 0$
28. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$.
- i. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ii. $f(x) = 3x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 17x - 6$
29. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g αν:
- i. $f(x) = 2x^4 + 5x$ και $g(x) = 5x^3 + 2$ ii. $f(x) = 2x^3 + 7x^2$ και $g(x) = x^4 + 8x + 12$
30. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 5x^2$ με την ευθεία $y = 4x + 3$.
31. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x - 1$ βρίσκεται:
- i. πάνω από τον άξονα $x'x$ ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.
32. Αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 2x^3 \alpha x^2 - \beta x + 2$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ είναι 28.
- α. να βρείτε τα α και β . β. για $\alpha=5$ και $\beta=1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
33. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 3$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 4$.
- α. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της P και της ευθείας ε .
- β. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της P βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε
34. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση: $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$.
- Αν η γραφική παράσταση της P τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' σε δύο σημεία με ακέραιες τετμημένες,
- α. να βρείτε τα α και β .
- β. να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της P δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.