



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ – ΣΧΗΜΑ HORNER»

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες (αν έχουν) των πολυωνυμικών εξισώσεων:

α) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$, β) $x^3 + 2x^2 + 7x + 6 = 0$, γ) $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$, δ) $4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0$,
ε) $x^4 + x^3 - 10x^2 + 8x = 0$, στ) $x^5 + x^4 + 2x^2 - 4x = 0$, ζ) $2x^5 - x^3 + 4x^2 - 2 = 0$, η) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, β) $14x^4 - 374x^3 - 72x^2 - 17x + 4 = 0$, γ) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0$
δ) $2x^3 + 5x^2 - 9x - 18 = 0$, ε) $6x^4 + x^3 - 46x^2 - 39x + 18 = 0$, στ) $2x^6 + 3x^5 - 31x^4 - 21x^3 + 101x^2 + 18x - 72 = 0$

3. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες

α) $x^3 + 2x - 2 = 0$, β) $x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$, γ) $x^4 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$, δ) $4x^3 + 6x^2 - 2x - 3 = 0$,
ε) $x^{2v+1} - x^{2v} - x^{v+1} - x^v + 1 = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, στ) $x^{2v+1} - x^{2v} - x^{2v-1} - x^{v+1} - x^v - 1 = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$

4. α) Αν η εξίσωση : $x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 12 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες -1 και 2 , να βρεθούν τα α και β και στην συνέχεια οι υπόλοιπες ρίζες της.

β) Αν η εξίσωση : $x^5 - x^4 + 2\alpha x^3 + 2x^2 + 4\beta x = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει διπλή ρίζα το -2 , να βρεθούν τα α και β και στην συνέχεια οι υπόλοιπες ρίζες της.

5. Να λυθούν οι παρακάτω αντίστροφες εξισώσεις:

α) $15x^3 - 49x^2 + 49x - 15 = 0$, β) $5x^4 - 2x^3 + 2x - 5 = 0$, γ) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$,
ε) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$, στ) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$, ζ) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$,

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

6. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις γινόμενο :

α) $(x-2)(x^2+2x-3) < 0$, β) $(x^2+3x-4) \cdot (-x^2+3x-2) \leq 0$, γ) $(3-x)(x^2-4x+3)(x^2-5x+7) > 0$
γ) $(-x^2+8x-12)(x^2+x-20)(4-x) \geq 0$, δ) $-x(x^2-1)(-x^2-5x+6) \leq 0$, ε) $(1-2x)(-x^2-12)(x^2-4x+4) < 0$

7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις γινόμενο :

α) $-(x-1)^2(x^2+x-2)^3 < 0$, β) $-(x^2-3x-4)^3 \cdot (-x^2+3x-2)^5 \leq 0$, γ) $(x^2-4x-5)(-x^2+5x-8)^5 > 0$
γ) $(-x^2+8x)^7(x^2-16)^4(2-x)^3 \geq 0$, δ) $-x^2(x^2-1)^3(-x^2-5x+6)^4 > 0$, ε) $-(1-2x)^3(-x^2-1)^{11}(x^2-6x+9) \leq 0$

8. Να λύσετε τις παρακάτω πολυωνυμικές ανισώσεις :

α) $x^3 - x^2 + 2x + 2 > 0$, β) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 < 0$, γ) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \leq 0$, δ) $x^5 + x^3 - x^2 - 1 \geq 0$,
ε) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 \leq 0$, στ) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 > 0$, ζ) $x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0$, η) $4x^3 - 8x^2 + 7x - 3 \leq 0$

9. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

α) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0$ και $-x^3 - 2x^2 + 15x \leq 0$ β) $x^3 + 3x^2 < 4x + 12$ και $x^4 - 6 < -5x$
γ) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \geq 0$ και $(-x^2 + 4x)(x^2 + 5x - 6) < 0$, δ) $x^4 \leq 8x$ και $(x^2 - 4)^9(5 - x)^4(-x^2 + 7x - 10) > 0$



Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

10. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{x^3 - 2x^2}{x-1} &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}, & \beta) \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} &= \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x^2 - 1}, & \gamma) \frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} &= 2x - \frac{x-3}{x-2}, \\ \delta) \frac{3x}{x-3} - \frac{2x^2}{x+1} &= \frac{10x+6}{x^2-2x-3}, & \epsilon) x + \frac{3}{x-2} &= 1 - \frac{4-5x}{x^2-2x}, & \sigma\tau) \frac{3x^2}{x-2} - \frac{9x}{x^2-4} - 4 &= \frac{10x^2+20}{x^3-4x} + \frac{10}{x^2+2x} \end{aligned}$$

11. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις πηλίκο:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{5x}{1-x} < 0, & \beta) \frac{-3+x}{x^2+2x} \geq 0, & \gamma) \frac{x^2-9}{x \cdot (2x^2+1)} \leq 0, & \delta) \frac{x}{(1+x)(x^2-3x+2)} < 0, & \epsilon) \frac{(2-x-x^2)(3-x)}{(x^2-4)(-x^2+3x-5)} \geq 0 \\ \sigma\tau) \frac{(1-x)^3(x^2-2x-3)^7}{(3-x)^4(-2x^2-1)^5} \leq 0, & \zeta) \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+2x-3} \geq 0, & \eta) \frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2-3x-18} \leq 0, & \theta) \frac{-(4-x)^4}{(-x+3)^3(-x^2+5x)^9} \leq 0 \end{aligned}$$

12. Να λύσετε τις παρακάτω κλασματικές ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{x-1}{x+1} < x, & \beta) \frac{1}{x+2} > \frac{3}{x-3}, & \gamma) \frac{14x}{x+1} - \frac{9x-30}{x-4} \leq 0, & \delta) \frac{x^2-25x+12}{x^2-4x+5} < 3, & \epsilon) \frac{2x+3}{x^2+x-12} \leq \frac{1}{12}, \\ \sigma\tau) \frac{4}{1+x} + \frac{2}{1-x} < 1, & \zeta) \frac{20}{x^2-7x+12} + \frac{10}{x-4} \leq -1, & \eta) \frac{2x^2}{x+2} \geq \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x-2}, & \theta) \left| \frac{3x}{x^2-4} \right| \leq 1, & \iota) \frac{|x+3|+x}{x+2} > 1 \end{aligned}$$

13. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x + 2 &= 0, & \beta) 2\sigma\upsilon\nu^3 x + 4\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + 1 &= 0, & \gamma) \eta\mu^5 x + 2\eta\mu^4 x + \eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x - 1 &= 0 \\ \gamma) \epsilon\phi^3 x - \epsilon\phi^2 x - 3\epsilon\phi x + 3 &= 0, & \delta) \sigma\phi^4 x + 4\sigma\phi^3 x - 2\sigma\phi^2 x - 4\sigma\phi x + 1 &= 0, & \epsilon) 4\sigma\upsilon\nu^4 x + 4\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x &= 7 - 9\eta\mu^2 x \end{aligned}$$

14. Να λυθούν οι παρακάτω άρρητες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \sqrt{2x-6} &= 2, & \beta) \sqrt{1-2x} &= 1, & \gamma) \sqrt{x+2} &= x, & \delta) x\sqrt{x-1} &= 2, & \epsilon) 3\sqrt{3x-2} &= x^2+2, & \sigma\tau) \sqrt{-x^3-4x} &= 2x, \\ \zeta) \sqrt{x^2-2x} &= \sqrt{x-2}, & \eta) \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} &= 4, & \theta) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} &= 2, & \iota) \sqrt{3x-5} &= 3 - \sqrt{x-2}, \\ \kappa) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} &= 2\sqrt{x}, & \lambda) \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} &= \sqrt{4x-7}, & \mu) \sqrt{x+1} - 1 &= \sqrt{x-\sqrt{x+8}} \end{aligned}$$

15. Να λυθούν οι παρακάτω άρρητες ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) 2\sqrt{x-1} < x, & \beta) \sqrt{x+18} < 2-x, & \gamma) \sqrt{2x-x^2} < 5-x, & \delta) 3-x > 3\sqrt{1-x^3}, & \epsilon) \sqrt{2x^2-3x-5} \geq x-1 \\ \sigma\tau) 3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1, & \zeta) \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6, & \eta) \sqrt{x-3} \leq \frac{2}{\sqrt{x}-2}, & \theta) \frac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1} \geq 0 \\ \iota) \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} - \sqrt{2x+4} > 0, & \kappa) \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1} \end{aligned}$$