

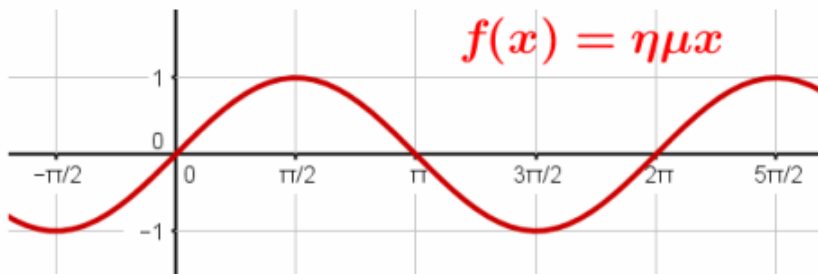


ΦΥΛΛΟ ΘΕΩΡΙΑΣ

(Τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

Συνάρτηση : $f(x) = \eta \mu x$, (x rad)

- Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$
- Μέγιστη τιμή : 1
- Ελάχιστη τιμή : -1
- Περίοδος : $T = 2\pi$
- Συνάρτηση περιττή



Πίνακας μονοτονίας - Ακρότατων

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \eta \mu x$	0	1	0	-1	0
		↑	↓	↑	
		μέγιστη τιμή		ελάχιστη τιμή	

Συνάρτηση : $f(x) = \rho \cdot \eta \mu(\omega \cdot x) + \kappa$ (x rad) $\rho \in \mathbb{R}^*$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$

- Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$
- Μέγιστη τιμή : $|\rho| + \kappa$
- Ελάχιστη τιμή : $-|\rho| + \kappa$
- Περίοδος : $T = 2\pi/\omega$

Πίνακας μονοτονίας - ακρότατων

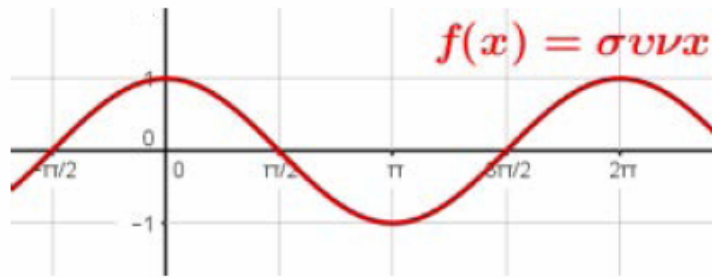
$\omega \cdot x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/2\omega$	π/ω	$3\pi/2\omega$	$2\pi/\omega$
$f(x) = \rho \cdot \eta \mu(\omega \cdot x) + \kappa$ $\rho > 0$	κ	$\rho + \kappa$	κ	$-\rho + \kappa$	κ
		↑	↓	↑	
		Μέγιστη τιμή		Ελάχιστη τιμή	

$\omega \cdot x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/2\omega$	π/ω	$3\pi/2\omega$	$2\pi/\omega$
$f(x) = \rho \cdot \eta \mu(\omega \cdot x) + \kappa$ $\rho < 0$	κ	$-\rho + \kappa$	κ	$\rho + \kappa$	κ
		↓	↑	↓	
		Ελάχιστη τιμή		Μέγιστη τιμή	



Συνάρτηση : $f(x) = \sin x$, (x rad)

- Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$
- Μέγιστη τιμή : 1
- Ελάχιστη τιμή : -1
- Περίοδος : $T = 2\pi$
- Συνάρτηση άρτια



Πίνακας μονοτονίας – ακρότατων

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \sin x$					
	1	0	-1	0	1
	μέγιστη τιμή		ελάχιστη τιμή		μέγιστη τιμή

Συνάρτηση : $f(x) = \rho \cdot \sin(\omega \cdot x) + \kappa$ (x rad) $\rho \in \mathbb{R}^*$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$

- Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$
- Μέγιστη τιμή : $|\rho| + \kappa$
- Ελάχιστη τιμή : $-|\rho| + \kappa$
- Περίοδος : $T = 2\pi/\omega$

Πίνακας μονοτονίας – ακρότατων

ωx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/2\omega$	π/ω	$3\pi/2\omega$	$2\pi/\omega$
$f(x) = \rho \cdot \sin(\omega \cdot x) + \kappa$ $\rho > 0$					
	$ \rho + \kappa$	κ	$- \rho + \kappa$	κ	$ \rho + \kappa$
	μέγιστη τιμή		ελάχιστη τιμή		μέγιστη τιμή

ωx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/2\omega$	π/ω	$3\pi/2\omega$	$2\pi/\omega$
$f(x) = \rho \cdot \sin(\omega \cdot x) + \kappa$ $\rho < 0$					
	$ \rho + \kappa$	κ	$- \rho + \kappa$	κ	$ \rho + \kappa$
	ελάχιστη τιμή		μέγιστη τιμή		ελάχιστη τιμή



Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$

- **Πεδίο ορισμού :** $A = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$
- **Σύνολο τιμών :** $f(A) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

- **Περίοδος :** $T = \pi$

[αφού για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι: $x - \pi, x + \pi \in A$ και $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi(x + \pi)$].

Επομένως για να μελετήσουμε περαιτέρω τη συνάρτηση f περιοριζόμαστε σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

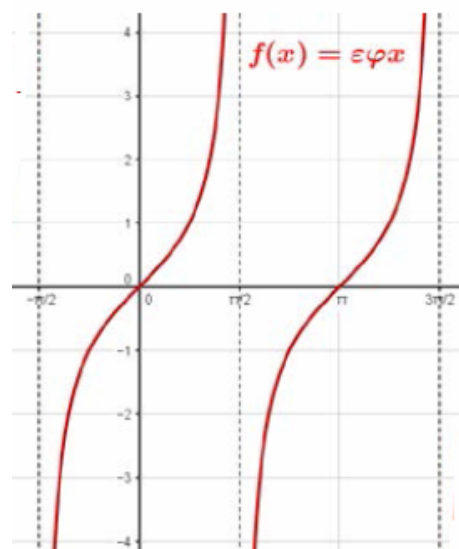
και συγκεκριμένα το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- **Κατακόρυφες ασύμπτωτες:** $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$

- Είναι **περιττή** συνάρτηση αφού για κάθε $x \in A, -x \in A$ και $\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ **δεν παρουσιάζει ακρότατα**.



Μελέτη και χάραξη των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot \varepsilon\varphi(\alpha \cdot x)$, $\alpha > 0$

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \varepsilon\varphi(\alpha \cdot x)$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{\alpha}$ και τη μελετούμε σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου,

που αυτό είναι συνήθως $\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

Όταν $\rho > 0$:

- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ ενώ δεν είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

- Δεν έχει ακρότατα.

- Έχει **κατακόρυφες ασύμπτωτες** τις ευθείες

$$x = -\frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{2\alpha}$$

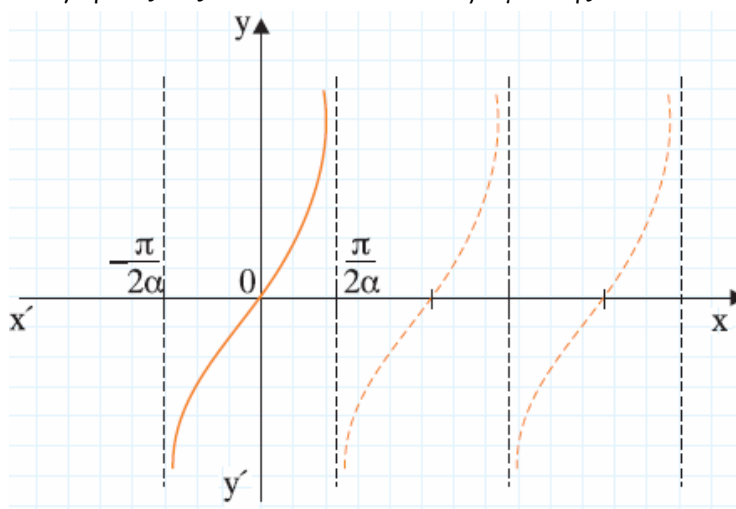
- Όταν το x «πλησιάζει» στο $\frac{\pi}{2\alpha}$ τότε

η $f(x)$ τείνει στο $+\infty$

ενώ όταν το x «πλησιάζει» στο $-\frac{\pi}{2\alpha}$ τότε

η $f(x)$ τείνει στο $-\infty$.

- Είναι **περιττή** και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $(0,0)$.



**Όταν $\rho < 0$:**

- Είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ ενώ δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

- Δεν έχει ακρότατα.

- Έχει **κατακόρυφες ασύμπτωτες** τις ευθείες

$$x = -\frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{2\alpha}$$

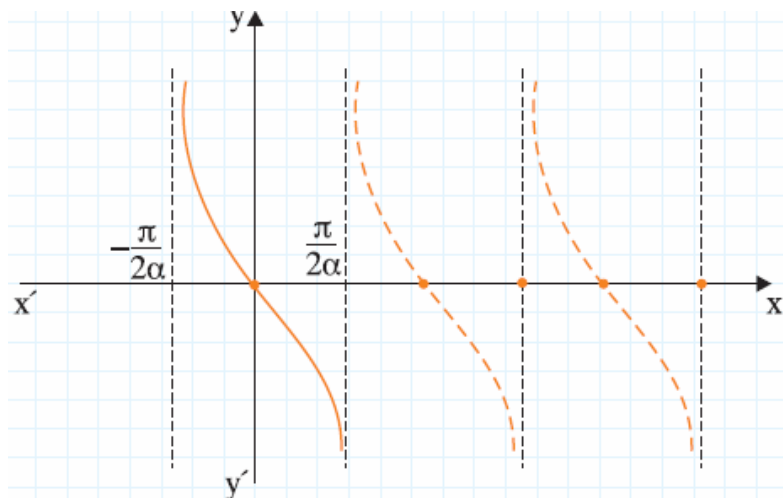
- Όταν το x «πλησιάζει» στο $\frac{\pi}{2\alpha}$ τότε

$$\eta \ f(x) \ \text{τείνει στο} \ -\infty$$

$$\text{ενώ όταν το } x \text{ «πλησιάζει» στο } -\frac{\pi}{2\alpha} \text{ τότε}$$

$$\eta \ f(x) \ \text{τείνει στο} \ +\infty.$$

- Είναι **περιττή** και η γραφική της παράσταση έχει **κέντρο συμμετρίας** το $(0,0)$.

**Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$**

- Πεδίο ορισμού :** $A = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \neq 0\}$

- Σύνολο τιμών :** $f(A) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x = 0\}$

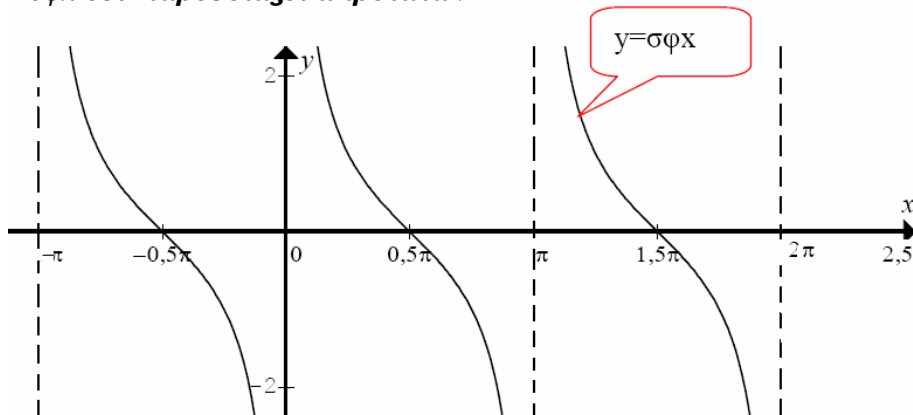
- Περίοδος :** $T = \pi$ [αφού για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι: $x - \pi, x + \pi \in A$ και $\sigma\phi x = \sigma\phi(x - \pi) = \sigma\phi(x + \pi)$]
Επομένως για να μελετήσουμε περαιτέρω τη συνάρτηση f περιοριζόμαστε σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου και συγκεκριμένα το $(0, \pi)$

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες** $x = 0$ και $x = \pi$

- Είναι **περιττή** συνάρτηση αφού για κάθε $x \in A, -x \in A$ και $\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, \pi)$

- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ **δεν παρουσιάζει ακρότατα**.





Μελέτη και χάραξη των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot \sigma\phi(\alpha \cdot x)$, $\alpha > 0$

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\phi(\alpha \cdot x)$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{\alpha}$ και τη μελετούμε σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου, που αυτό είναι συνήθως $\left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right)$

Όταν $\rho > 0$:

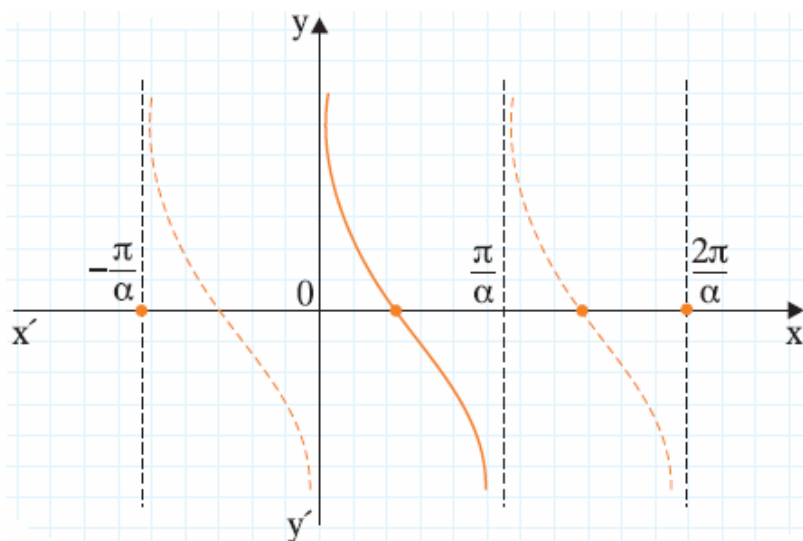
- Είναι γνησίως φθίνουσα $\left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right)$ στο ενώ δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.
- Δεν έχει ακρότατα.

- Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{\alpha}$$

- Όταν το x «πλησιάζει» στο $\frac{\pi}{\alpha}$ τότε η $f(x)$ τείνει στο $-\infty$ ενώ όταν το x «πλησιάζει» στο 0 τότε η $f(x)$ τείνει στο $+\infty$.

- Είναι περιττή και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $(0, 0)$.



Όταν $\rho < 0$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right)$ ενώ δεν είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.
- Δεν έχει ακρότατα.

- Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{\alpha}$$

- Όταν το x «πλησιάζει» στο $\frac{\pi}{\alpha}$ τότε η $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ενώ όταν το x «πλησιάζει» στο 0 τότε η $f(x)$ τείνει στο $-\infty$.

- Είναι περιττή και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $(0, 0)$.

