



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα – Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

1. Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$, $\vec{OG} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, $\vec{GB}$ με την βοήθεια των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
2. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα και $\vec{AB} = 3\vec{\alpha}$, $\vec{AD} = 4\vec{\beta}$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MN}$.
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M το μέσο της AD . Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{BM}$ και $\vec{MG}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω σημείο E στην πλευρά AB ώστε $AE = 3BE$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AE}$, $\vec{DE}$, $\vec{GE}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$ ώστε τα Δ , Γ να βρίσκονται εκατέρωθεν του B και να ισχύει $3B\Delta = 2B\Gamma$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{AD}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
6. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$, $\vec{OG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{OD} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να δείξετε ότι $\vec{AG} + \vec{DB} \parallel \vec{AB}$.
7. Αν ισχύει ότι $\vec{AD} = 3\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 3\vec{AG}$ να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 5\vec{AB} + 8\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 10\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 2\vec{AG}$.
α. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{DE}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$
β. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$. (ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 4\vec{AB} - 9\vec{AG}$ και $\vec{AE} = \vec{AB} - 6\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
11. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:
α. το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$
β. το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\beta}$.
12. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A , B , Γ , Δ είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα.
13. α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{DG} = \vec{\alpha}$, $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{BD} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι τραπέζιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\beta}$, $\vec{AD} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ είναι τραπέζιο.
14. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\beta}$, $\vec{AD} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:
α. το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
β. το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{BG} - \vec{AD}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.



- 15.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OD} = 6\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{GD}$ είναι ομόρροπα.
- 16.** Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 17.** Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OG} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 18.** Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. **(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)**
- 19.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AG} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Αν Δ σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AD} = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$, να δείξετε ότι τα σημεία B, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
- 20. α)** Αν ισχύει $4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 9\overrightarrow{MG} = 0$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
β) Αν ισχύει $9\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG} = 0$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
γ) Αν ισχύει $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{GM}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 21. α)** Αν ισχύει $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ, Μ είναι συνευθειακά.
β) Αν ισχύει $5\overrightarrow{PL} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ, Μ είναι συνευθειακά. **(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)**
γ) Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{MG}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 22.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E, Z σημεία τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$.
α. Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$
β. Να δείξετε ότι τα σημεία B, Z, E είναι συνευθειακά. **(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)**
- 23.** Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z στην AD και στην διαγώνιο AG αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι:
α. $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
β. $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta})$ και να υπολογίσετε το $\overrightarrow{EB}$ με την βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
γ. τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά. **(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)**
- 24.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και η διάμεσός του AM. Πάνω στα τμήματα AB, AM και AG παίρνουμε τα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα ώστε $AD = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{3}AM$, $AZ = \frac{1}{4}AG$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\beta}$ τότε:
α. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DZ}$
β. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.