



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων»

1. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, ii) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, iii) $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$.

2. Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{5}$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 120^\circ$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε : i) το $|\vec{v}|$, ii) τις γωνίες $\left(\vec{\alpha}, \vec{v}\right)$, $\left(\vec{v}, \vec{\beta}\right)$

3. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 120^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}.$$

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ του επιπέδου με $|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = 1$ και $\theta = \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 60^\circ$.

Να αναλύσετε το $\vec{u}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοιες ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \parallel \vec{v}$.

5. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα όταν : $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$, $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 1)$.

6. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 4), \vec{\beta} = (-3, 1)$. Για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 18$ και $\vec{\beta}\vec{\gamma} = 8$. Να βρείτε το $\vec{\gamma}$.

7. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1, -1)$. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{u}, \vec{v}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις :

α) Η $\vec{u}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\beta} = (2, 3)$ και η $\vec{v}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma} = (-1, 2)$.

β) Οι $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετες και η $\vec{u}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\beta} = (2, 3)$

γ) $|\vec{u}| = 2$ και $|\vec{v}| = 1$.

8. Έστω ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 1, |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$. Βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

9. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1}$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$.

10. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{\alpha}|$.

11. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{v} + \vec{u}$ με $\vec{v} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{u} \perp \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι : $\vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$.



12. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν : $\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma} - \vec{\beta} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + 4\vec{\gamma})$.

13. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ β) $\vec{p} \parallel \vec{\alpha}$ γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

14. Έστω $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-4, 10)$. Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$, στις επόμενες περιπτώσεις :

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 20$, ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

15. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ και $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$ τότε :

α) να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}|^2$,

β) να δείξετε ότι η $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι αμβλεία ,

γ) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

16. Αν $\vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OG} = \vec{0}$, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$ και $|\vec{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

α. να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β. να βρείτε τη σχετική θέση των A, B, Γ.

γ. να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}$ είναι ορθογώνια.

δ. να αποδείξετε ότι η γωνία των $\vec{OA}, \vec{OG}$ είναι οξεία.

17. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\angle A = 60^\circ$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ ώστε $\vec{BD} = 2 \cdot \vec{\Delta\Gamma}$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{AG} = \vec{\beta}$ και

$$|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2.$$

α. Να αποδείξετε ότι: $3 \cdot \vec{AD} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ β. Να βρείτε το $\text{syn}(\vec{AB}, \vec{AD})$.

18. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, -2)$, $\vec{\beta} = (2, 0)$ και $\vec{x}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ β. Να υπολογίσετε το $\text{syn}(\vec{\beta}, \vec{x})$.