



## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ II»

1. Έστω το διάνυσμα  $\vec{a}=(-1,2)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$  ώστε:  $\vec{v} \perp \vec{a}$  και  $|\vec{v}| = 5$ .

β) Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u}$  ώστε:  $\vec{u} // \vec{a}$  και  $\vec{a} \cdot \vec{u} = 3\sqrt{5}$ .

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}=(-1,2)$  και  $\vec{b}=(0,1)$ . Αν  $\vec{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$  και  $\vec{AG} = 2\vec{a} - \vec{b}$ , να υπολογίσετε το  $\vec{BG} \cdot \vec{AM}$  όπου  $\vec{AM}$  διάμεσος του τριγώνου.

3. Αν  $\vec{a}=(1,-1)$ ,  $\vec{b}=(1,1)$ ,  $2\vec{v} + \vec{u} = \vec{b}$  και  $\vec{v} + 2\vec{u} = \vec{a}$ , να βρείτε α) Τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{u}$  β) Το συν  $(\vec{v}, \vec{u})$ .

4. Δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}|=2$ ,  $|\vec{\beta}|=3$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ , Αν  $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  να υπολογίσετε την  $(\vec{a}, \vec{\delta})$

5. α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}=(-2,1)$  και  $\vec{b}=(1,3)$ . Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{a}$  σε δύο συνιστώσες  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$  ώστε  $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$  και  $\vec{\delta} // \vec{b}$ .

β) Έστω τα διανύσματα  $\vec{a}=(3,-4)$  και  $\vec{b}=(5,10)$ . Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{b}$  σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{a}$ .

6. Σε τρίγωνο ABΓ είναι  $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{AG} = -3 \cdot \vec{\beta}$ , όπου  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι  $\frac{2\pi}{3}$ .

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $(4 \cdot \vec{\beta} + 2 \cdot \vec{\alpha})^2$ ,  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$ .

β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς BΓ να εκφράσετε τα διανύσματα  $\vec{AM}$  και  $\vec{BG}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

γ) Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BG}$ .

7. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση:  
 $(\vec{\alpha} + x \cdot \vec{\beta}) \cdot (2 \cdot \vec{\alpha} - x \cdot \vec{\beta}) = 17$

8. Να βρείτε το είδος της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  αν:

1)  $\vec{\alpha}=(2,-3)$  και  $\vec{\beta}=(1,-2)$ . 2)  $\vec{\alpha}=(2,3)$  και  $\vec{\beta}=(1,-2)$ . 3)  $\vec{\alpha}=(2,-3)$  και  $\vec{\beta}=(3,2)$ .



9. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ . Έστω τρίγωνο ABΓ και AM διάμέσός του για το οποίο ισχύουν  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\overrightarrow{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

1. Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
2. Να εκφράσετε το  $\overrightarrow{AG}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$
3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου  $\overrightarrow{AM}$
4. Να αποδείξετε ότι η γωνία των  $\overrightarrow{AM}$  και  $\vec{\alpha}$  είναι ίση με  $\frac{\pi}{6}$

10. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ .

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .
- β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ .
- γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

11. Σε τρίγωνο ABΓ είναι:  $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ ,  $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AM}$ , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία.
- γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει  $A(3, 1)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

12. Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$  και  $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ .
- β) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$  να είναι κάθετα.
- γ) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το διάνυσμα  $\overrightarrow{BG}$ .

13. Έστω δυο διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right)$  και  $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu)$

- α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  ως συνάρτηση του  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- β) Αν  $\mu = 2$ , τότε:

1. να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (3, -4)$  και ότι το  $\vec{\alpha}$  είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$ .
2. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$

14. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$  και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

- α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

- i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$
- ii) να υπολογίσετε  $|\vec{\gamma}|$
- iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα.