



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Επαναληπτικά θέματα στα διανύσματα»

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.
- β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $k\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k .
- γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

- α) Τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$
- β) Το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{a}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία A(2, 3), B(-1, 5) και Γ(-2, -4).

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.
- β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο Μ της ΑΓ.
- γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία A(1+2a, 4a-2) και B(5a+1, -a), $a \in \mathbb{Z}$.

- α) Να γράψετε το $|\vec{AB}|$ συναρτήσει του a και να βρείτε το a ώστε $|\vec{AB}| = 10$.
- β) Έστω $a=2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

**ΘΕΜΑ 5**

Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

$$3|\vec{a}| + |\vec{\beta}| = 9, \quad 2|\vec{a}| - |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $A\vec{E} = \frac{2}{5}A\vec{\Delta}$, $A\vec{Z} = \frac{2}{7}A\vec{\Gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $E\vec{Z}$ και $Z\vec{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $A\vec{B}$ και $A\vec{\Delta}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{\beta})$

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{a}$.

ΘΕΜΑ 9

Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.



ΘΕΜΑ 10

Θεωρούμε τα σημεία $A(a+1, 3)$, $B(a, 4)$ και $\Gamma(-4, 5a+4)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του a , τα A , B , Γ είναι συνευθειακά.
- Αν $a=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$

ΘΕΜΑ 11

Θεωρούμε τα σημεία P , Λ , K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση: $5\vec{P\Lambda} = 2\vec{PK} + 3\vec{PM}$

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία K , Λ και M είναι συνευθειακά.
- Για τα παραπάνω σημεία K , Λ και M να δείξετε ότι ισχύει: $2\vec{A\Lambda} + 3\vec{B\Lambda} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται τα διανύσματα $0\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $0\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $0\vec{\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων και αντίστοιχα.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$
- Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

ΘΕΜΑ 13

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

- Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
- Να αποδείξετε ότι: $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\vec{A\Delta} = 2\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\vec{E}} = 5\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}$

- Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.
- Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.



ΘΕΜΑ 15

Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{A\Gamma} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 17

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{a} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ 18

Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{A\Gamma} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.