



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ »

1. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii. $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

iii. $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

2. Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

3. Αν $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\alpha}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

1) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|^2}$ και $\vec{\beta}$, 2) $(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ 3) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|^2}$ και $\vec{\alpha}$.

5. Αν $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v}=3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

6. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{|\vec{\beta}|^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

7. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=4$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\alpha})} = \widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\beta})} = 60^\circ$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

8. Αν $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\alpha}|=2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

9. Αν $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{w}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $|\vec{v}|=2$, $|\vec{w}|=4$, $(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το $\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

10. Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{4}$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{\beta}$.

11. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 120^\circ$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{w}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

12. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 60^\circ$ και για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ ισχύουν $2\vec{v}-\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $-\vec{v}+\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να βρείτε το

$$\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$



13. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2, \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}=60^\circ$ και το τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}, \vec{BG}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

14. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ με $\vec{AB}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{AD}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}=135^\circ$.

15. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A}=120^\circ, (AB)=9, (AG)=6$ και το σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\vec{BP}=2\vec{PG}$. Να υπολογισθεί το $|\vec{AP}|$.

16. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\sqrt{7}\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=1, |\vec{\beta}|=2$. Να βρείτε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$ και τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $\vec{\gamma} \perp \lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

17. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-8\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=1, |\vec{\beta}|=\sqrt{7}$. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

18. Οι διανυσματικές ακτίνες $\vec{OA}=\vec{\alpha}, \vec{OB}=\vec{\beta}$ και $\vec{OG}=\vec{\gamma}$ των σημείων Α, Β και Γ είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=3, |\vec{\gamma}|=\sqrt{7}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}.$$

1) Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

2) Βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και την γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

3) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}+\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}+\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}.$$

19. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{2}=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\beta}=2\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$$

20. Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta}, (\vec{a}-3\vec{\beta}) \perp (\vec{a}+2\vec{\beta})$ και $|\vec{a}|=\sqrt{6}$. Να αποδειχθεί ότι $|2\vec{a}-\vec{\beta}|=5$.

21. Αν $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ όπου $|\vec{\gamma}|=\sqrt{3}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.



22. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{x}$ ισχύει $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ και $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

α) Να αποδειχθεί ότι: $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$ β) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

23. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = \lambda, |\vec{\beta}| = \mu$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{u} = \mu \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \mu \vec{a} - \lambda \vec{\beta}$, τότε:

1) Να υπολογισθούν οι γωνίες $\widehat{(\vec{u}, \vec{\alpha})}$ και $\widehat{(\vec{v}, \vec{\beta})}$. 2) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{u} \perp \vec{v}$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 60^\circ$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x} = \mu \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$ για το οποίο είναι

$$|\vec{x}| = 9 \text{ και } \vec{x} \perp \vec{a}.$$

25. Α. Να αποδειχθεί ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{v} = |\vec{\beta}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

Β. Να αποδειχθεί ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} - \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ διχοτομεί την παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

Γ. Αν $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$, να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}| = \sqrt{3}$ που να διχοτομεί τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 60^\circ$.

26. Αν $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \vec{\beta}$ τέμνονται κάθετα, βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

27. Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο και ισχύει: $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1}$, να αποδείξετε ότι: $\vec{\beta} = 2\vec{a}$.

28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $|\vec{AB}| = 4, |\vec{AG}| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι $\frac{\pi}{3}$

α) Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε: β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{AM}$

γ) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{AB}$

29. Σε σύστημα συντεταγμένων Οχψ θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ του μοναδιαίου κύκλου, για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$2\vec{OA} = 4\vec{BG} + \vec{AG}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Για τις διανυσματικές ακτίνες των Α, Β, Γ ισχύει η σχέση: $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = 5\vec{OG}$

β) Τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}$ είναι κάθετα. γ) $\sin(\vec{OA}, \vec{OG}) = 3/5$ δ) $\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \pm 1$.