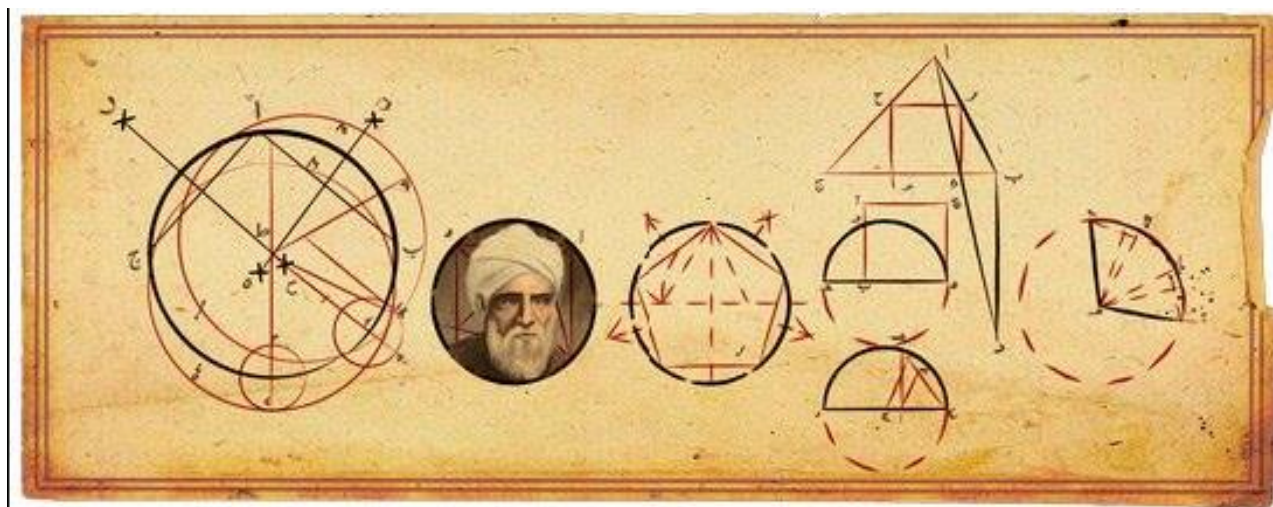


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΦΥΛΛΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ : ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ**



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

A2. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, είναι

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

2. Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

3. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις

$$\text{σχέσεις } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

4. Το διάνυσμα $\vec{\eta} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$.

5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι παράλληλα, τότε: $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

B1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x'x.

B2. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y - \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

Γ2. Να δείξετε ότι (για τα κατάλληλα $\lambda \in \mathbb{R}$) οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ3. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία της (1) με τους άξονες να είναι 1/2 τ.μ

Γ4. Για $\lambda = 4$ να βρείτε την απόσταση του σημείου $O(0, 0)$ από την ευθεία.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο κύκλος C: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ και η ευθεία (ε): $2x + y + 5 = 0$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία: (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται πάντα από το τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma})$

δ. Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση της μορφής: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

ε. Οι συντεταγμένες (x_0, y_0) του κέντρου ενός κύκλου επαληθεύουν την εξίσωση του

A2. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ και συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ΘΕΜΑ Β

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση: $3x + 4y - 1 = 0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1): (k+2)x - 3y - 24k = 0$ και $(\epsilon_2): 3y - 4x - 2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το k , ώστε οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 να είναι παράλληλες.

Γ2. Για $k = 2$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ , η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_2 στο σημείο της $A(1, 2)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο τομής B της ευθείας δ με την ευθεία ϵ_1

β. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ϵ_1, ϵ_2

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 στα σημεία B, A αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$.

Δ2. Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$.

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνονται από την εξίσωση $y = \lambda x$.

β. Το διάνυσμα $\vec{n} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$.

γ. Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα $x'x$.

δ. Ο κύκλος με εξίσωση $C: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ έχει κέντρο το σημείο $K(-1, 2)$

ε. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$.

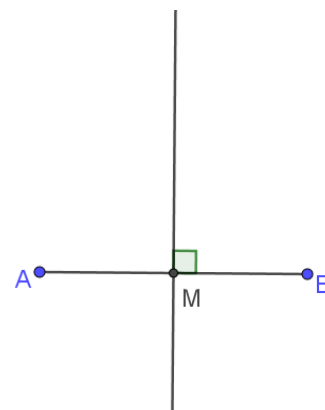
ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

B1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

B2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

B3. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .



ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) και η εφαπτομένη της (ε) σ' ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτής, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B .

Γ1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B ως συνάρτηση των p και y_1 .

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο την AB διέρχεται από την εστία της παραβολής.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

Δ2. Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι: $\overline{A\Delta} = 2 \cdot \overline{\Delta B}$ και $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{E\Gamma}$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Δείξτε ότι αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι Σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = B/A$.

β) Η ακτίνα του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$ είναι ίση με 4.

γ) Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

δ) Αν η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90° τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 0.

ε) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ έχει κέντρο K με συντεταγμένες: $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

B1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

B2. Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox .

B3. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

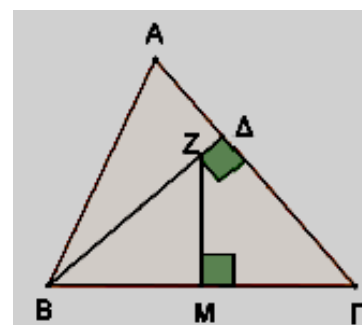
ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(5, 4)$. Η πλευρά AB έχει εξίσωση $2x - y + 4 = 0$, ενώ το ύψος BD έχει εξίσωση $y = 11 - 5x$.

Γ1. Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B .

Γ2. Βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.

Γ3. Αν $B(1, 6)$ τότε βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$ και το σημείο τομής Z , της μεσοκαθέτου με το ύψος BD .



ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(0, -1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση $c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x, y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4, \text{ ανήκουν στην ευθεία } (\varepsilon) \text{ με εξίσωση } y = -x - 2.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0, \text{ ανήκουν σε κύκλο } c_2 \text{ κέντρου } A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right) \text{ και ακτίνας } R = 2\sqrt{2}.$$

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω Οχψ σύστημα συντεταγμένων . Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνας $\rho > 0$, είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά όταν $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- β.** Για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- γ.** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$, $p \neq 0$, στο σημείο (x_1, y_1) είναι η $yy_1 = p(x - x_1)$.
- δ.** Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο επίπεδο Οχψ, τότε η απόστασή τους είναι,
- $$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ΘΕΜΑ Β

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1, 1)$, $\vec{AB} = \vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{AG} = \vec{\beta} = (6, 3)$.

- B1.** Να δείξετε ότι $\hat{A} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$
- B2.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του Β και την εξίσωση του ύψους ΒΔ
- B3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω σημείο $A(4, 4)$ της παραβολής $y^2 = 2px$, με $p \neq 0$.

- Γ1.** Να δείξετε ότι η παραβολή είναι η $y^2 = 4x$ και να βρείτε την εστία της Ε και την διευθετούσα της δ.
- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, της παραβολής στο Ρ.
- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(-1, 2)$, που εφάπτεται στην ε.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με $\lambda \neq 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, κάθε μία από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.
- β)** Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $\overrightarrow{AB}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου και O ένα σημείο αναφοράς, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$, όπου M το μέσο του τμήματος AB .

A2. Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστό ή Λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Τότε οι συντεταγμένες του μέσου $M(x, y)$ του τμήματος AB είναι $x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ και $y = \frac{y_2 - y_1}{2}$.

β) Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

δ) Η εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα xx .

ε) Έστω A, B, Γ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2: 4x^2 + y^2 = 20$

B1. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

B2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 8$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, -2)$, $\vec{\beta} = (2, 0)$, και τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = \vec{x} - \vec{v}$. όπου $\vec{x} = (x_1, y_1)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\vec{u} = (3, -2)$ και $\vec{v} = (x_1 - 2, y_1)$

Γ2. Αν επιπλέον ισχύουν και $\vec{x} // \vec{u}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{v}$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες (x_1, y_1) του διανύσματος $\vec{x}$ ii) Αν $\vec{x} = (-6, 4)$ να υπολογίσετε το $\sin(\angle \vec{\alpha}, \vec{x})$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$.

Δ2. Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέσουμε ότι (x, y)

είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB να δείξετε ότι : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

A2. Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστό ή Λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η απόσταση σημείου $M(x, y)$ από την εστία E παραβολής $C: y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ είναι $\left| x + \frac{p}{2} \right|$.

2. Ισχύει ότι: $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

3. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή.

4. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ένα μόνο σημείο το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$.

5. Η εκκεντρότητα της υπερβολής $C: x^2 - y^2 = \alpha^2$ είναι: $\varepsilon = \sqrt{2}$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με γωνία $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{b}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

A. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

B. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$ είναι $\vec{a} \cdot \vec{v} = 2$

Γ. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$ είναι $|\vec{v}| = 2$.

Δ. Η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{v}$ είναι $(\vec{a}, \vec{v}) = 60^\circ$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1, 8)$ $B(-1, 4)$ $\Gamma(9, 4)$.

Γ1. Να δείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου είναι ίση με 90° .

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD .

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ ($\alpha \neq 0$) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 5)$.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α .

Δ2. Για $\alpha=5$ να βρείτε τις εστίες E' , E και την εκκεντρότητα ε της έλλειψης.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου C_2 που έχει κέντρο την εστία E' και ακτίνα ίση με τον μικρό άξονα της έλλειψης είναι $\eta: x^2 + y^2 + 8y - 20 = 0$

Δ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C_2 στα σημεία στα οποία ο κύκλος τέμνει τον άξονα $y'y$.



ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$.

1. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$
2. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$
3. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} = 3 \cdot \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 8\lambda y = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
3. Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων
4. Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους τέμνεται από την ευθεία (η) : $y = x + 6$ στα σημεία A, B ώστε:
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

ΘΕΜΑ 3

1. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ είναι κύκλος και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
2. Ναδειχθεί ότι οι ευθείες $\epsilon_1: y = x - 4$ και $\epsilon_2: 3x + 2y - 7 = 0$ τέμνονται σε σημείο του προηγούμενου κύκλου.
3. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες στον κύκλο C που είναι παράλληλες στην ευθεία ϵ_1 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $|3\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

1. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$
2. Να υπολογίσετε την γωνία $\theta = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
3. Αν είναι γνωστό ότι: $(\vec{x} + 2\vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{x} + \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$, να δείξετε ότι: $\vec{x} = -2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
4. Να βρείτε το: $|\vec{x}|$.

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται ο κύκλος $C_1: (x - 3)^2 + y^2 = 8$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 4x$.

1. Να δείξετε ότι οι γραμμές C_1 και C_2 έχουν δύο κοινά σημεία A και B.
2. Εάν το A βρίσκεται στην γωνία $x\hat{O}y$ των αξόνων, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ , του κύκλου στο A.
3. Να δείξετε ότι η ϵ είναι εφαπτομένη και της παραβολής.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
3. Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την (1).



ΘΕΜΑ 7

Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(3,-2)$ και $\Gamma(1,2)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Δ του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία A και Δ .
4. Να βρείτε τα σημεία $M(x, y)$ της ευθείας (ε) , του ερωτήματος 3, για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου $MB\Gamma$ να είναι ίσο με 3.

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - 3 \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta B} = 5 \cdot \vec{\alpha} - 5 \cdot \vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha} = (-1, -1)$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 1$

1. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
2. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = -4 \cdot \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\beta}$
3. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$
4. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η εξίσωση $C_1: x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση C_1 παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο του K και την ακτίνα του ρ .
2. Αν E είναι το συμμετρικό σημείο του K ως προς τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η γραμμή στην οποία κινούνται τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MK}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MK}$ είναι η ευθεία $\delta: y = -1$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ .
4. Να βρείτε τα κοινά σημεία A και B του κύκλου και της παραβολής.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 - \lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 - 1 = 0$

1. Να αποδείξετε ότι η C_λ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
2. Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται τα κέντρα των παραπάνω κύκλων κινούνται στην παραβολή: $y^2 = 8x$.
3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x - y = -2$ εφάπτεται στην παραπάνω παραβολή.

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\lambda^2 x - \lambda y = 2$, $\varepsilon_2: 4\lambda x + y = \frac{1}{\lambda}$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$
2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι το: $M\left(\frac{1}{2\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda}\right)$.
3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τις διάφορες τιμές του λ



ΘΕΜΑ 12

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 7$.

1. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. 2. Να υπολογίσετε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

3. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} = -\frac{2}{3}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 13

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|x - 2|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|y + \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 0$ (1)

1. Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ακτίνας $\rho = 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

2. Για $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος (1) παίρνει τη μορφή

$$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 6$$

3. Να εξετάσετε αν η εστία της παραβολής $y^2 = 8x$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C του προηγούμενου ερωτήματος 2.

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η εξίσωση (ε) : $kx - (k+1)y + 2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του αριθμού k .

2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση (ε) διέρχονται για κάθε τιμή του k από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

3. Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η παραπάνω ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - k\vec{\beta}$, $k \in \mathbb{R}$, και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

2. Να βρείτε το αριθμό k , αν γνωρίζετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\gamma}$.

3. Αν $k=4$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται οι $(\varepsilon_\lambda): y = (\lambda - 1)x + 4$ και $(\varepsilon'_\lambda): (3 - \lambda)x - y + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να δειχθεί ότι:

α) Οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

β) Οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο B του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

2. α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο 2α):

i) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που προκύπτουν από τις (ε_λ) και (ε'_λ)

ii) Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές τους στις ευθείες αυτές



ΘΕΜΑ 17

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $x^2 = 4y$ και το σημείο της $A(2,1)$.

1. Να βρείτε την εστία E της παραβολής καθώς και την εξίσωση εφαπτομένης της στο A .
2. Έστω B τυχαίο σημείο της παραβολής με τετμημένη $x_B > 2$. Από το B φέρνουμε κάθετη προς την ευθεία $\varepsilon: y = -1$ που την τέμνει στο σημείο Γ . Αν η EA τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Δ
 - (i) να δείξετε ότι $BD = EB - EA$.
 - (ii) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B ώστε το εμβαδό του τριγώνου ABE να γίνει ίσο με 3 τ.μ.

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η εξίσωση: $(x - y + 1) + \lambda \cdot (x + y - 3) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. α) να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Σ .
β) Ποια από τις ευθείες:
 $\varepsilon_1: x - y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: x + y - 3 = 0$ και $\varepsilon_3: x - 1 = 0$ ανήκει στην παραπάνω οικογένεια των ευθειών;
3. Αν ε_4 και ε_5 είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 2$ και $\lambda = 1/3$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία τους.
4. Να βρείτε ποια από τις παραπάνω ευθείες με εξίσωση (1) εφάπτεται στον κύκλο C με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x = 1$

ΘΕΜΑ 19

Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C

- α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
- β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ , τότε:
 - i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.
 - ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C .

ΘΕΜΑ 20

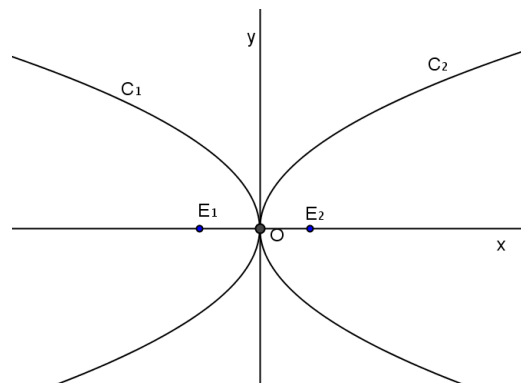
Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.
- β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

ΘΕΜΑ 21

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1: y^2 = -2px$ και $C_2: y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.

- α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 .
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .





ΘΕΜΑ 22

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .

- Να αποδείξετε ότι $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$.
- Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 .
- Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:
 - να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.
 - να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1 .

ΘΕΜΑ 23

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.

- Να αποδείξετε ότι $C: x^2 + (y-4)^2 = 4$.
- Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .
- Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 .

ΘΕΜΑ 24

Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = 4$. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημόριου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

- να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ .
- να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

ΘΕΜΑ 25

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

- Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.
- Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:
 - να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ME' και ME .
 - να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή.

ΘΕΜΑ 26

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{16}{9}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = 0$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 = 25$.
- Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα x , τότε:
 - να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B .
 - να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 .

**ΘΕΜΑ 27**

Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή $C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy .

ΘΕΜΑ 28

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x' στα σημεία $A'(-2, 0)$, $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$.

ΘΕΜΑ 29

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$, την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$ ii. $(MAB) \geq 3$

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο.

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν $M(1, -2)$. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου MAB .

ΘΕΜΑ 30

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α , ο κύκλος διέρχεται από την αρχή O .

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O .

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ .

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O .

ΘΕΜΑ 31

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x' και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

γ) Το σημείο $M(2, -1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M .



ΘΕΜΑ 32

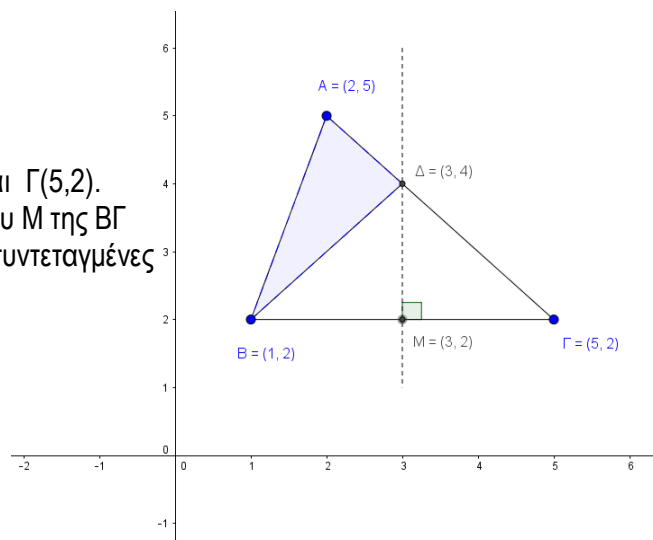
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ καθώς και το διάνυσμα $\vec{w} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$

1. Να δείξετε ότι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -3$.
2. Να υπολογίστε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}$
3. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x \cdot \vec{\beta}}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}} + \frac{\vec{w}}{\sqrt{3}|\vec{w}|} = x \cdot \vec{a}$

ΘΕΜΑ 33

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2,5), B(1,2) και Γ(5,2).

1. Να φτιάξετε το σχήμα και βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της BΓ
2. Αν η κάθετος στο M στη BΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ, βρείτε τις συντεταγμένες του Δ
3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΔ



ΘΕΜΑ 34

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda y - \lambda - 13 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

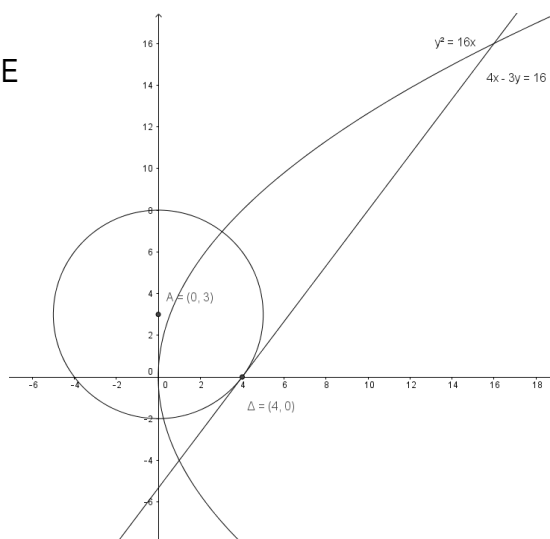
1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε πραγματικό αριθμό λ
2. Για λ=3

(α) Να βρεθεί το κέντρο, η ακτίνα και να γραφεί σε κανονική μορφή εξίσωσης κύκλου

(β)* ο κύκλος C τέμνει τον θετικό ημιάξονα στο σημείο E. Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του C στο σημείο E

(β)** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) $4x - 3y - 16 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C του ερωτήματος (α) και να βρεθεί το σημείο επαφής E

(γ) Να βρείτε την εξίσωση παραβολής με κορυφή το O και εστία το E





ΘΕΜΑ 35

Έστω η εξίσωση: $x(x + 4\lambda + y^2 - 2(\lambda - 2)y + 4\lambda^2 = 4\lambda + 4 = 0$ (1)

- i) Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο.
- ii) Να βρεθεί ο γ.τ των κέντρων των κύκλων αυτών για τις διάφορες τιμές του λ .
- iii) Να εξεταστεί αν υπάρχει κύκλος από τους (1) που εφάπτεται σ' έναν από τους άξονες.

ΘΕΜΑ 36

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$.

- α. Βρείτε την εστία **E** και την διευθετούσα δ της παραβολής.
- β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $x - y + 1 = 0$ και έχει κέντρο την εστία **E** της παραβολής.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής της οποίας η μια εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής, και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2(\lambda + 2)y + 2(\lambda + 1)^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) στην οποία κινείται το κέντρο του κύκλου, καθώς το $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η αρχική εξίσωση εφάπτονται σε δύο σταθερές παράλληλες προς την (ε) ευθείες
- δ) Αν $\lambda = -1$, να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που προκύπτει στο σημείο του $A(0, -2)$.

ΘΕΜΑ 38

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y + \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε το κ ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο **C**.
- β) Να υπολογίσετε το κ ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα $\rho = 1$.
- γ) Αν $M(4, 2)$ να δείξετε ότι το **M** είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου **C** για την τιμή του κ που προσδιορίσατε στο (β) ερώτημα.
- δ) Να δείξετε ότι το από το σημείο **M** << άγονται >> δύο εφαπτόμενες του κύκλου **C**.
- ε) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των δύο αυτών εφαπτόμενων.

ΘΕΜΑ 39

Δίνεται η παραβολή **C**: $x^2 = 4y$ και ένα σημείο της $A(x_0, y_0)$, με $x_0 > 0$

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της **C** στο σημείο **A** η οποία σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο, καθώς και οι συντεταγμένες του **A**.
2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο **K** στην διευθετούσα της παραβολής **C** και εφάπτεται της (ε) στο σημείο όπου αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.
3. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου **ΚΑΕ** όπου **E** η εστία της παραβολής.

ΘΕΜΑ 40

Έστω $\vec{a} = (x - 3, 3y + 1)$ και $\vec{b} = (x + 3, 3y - 1)$, το σημείο **M**(x, y) με $x, y \in \mathbb{R}$.

- α) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι κάθετα το σημείο **M** κινείται σε έλλειψη.
- β) Να βρείτε τις εστίες **E**, **E'**, τον μεγάλο άξονα, τον μικρό άξονα, και την εκκεντρότητα της έλλειψης.
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής Γ, Γ' της έλλειψης με την ευθεία $x = 1$.
- δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης στα σημεία Γ και Γ' .