



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Το 3^ο Θέμα Εξετάσεων»

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{12}, \kappa^2 + 2)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κ ώστε το $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα $x'x$.

β) Για τις τιμές του κ που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{75}, 15)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$.

2. Αν $\vec{\alpha} = (0, -\sqrt{2})$ και $\vec{\beta} = (1, -1)$, να βρείτε : α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, β) το $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$, γ) την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

3. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \neq 0$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ τότε : α) να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2} \cdot |\vec{\alpha}|^2$, β) να δείξετε ότι η $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι αμβλεία,

γ) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

4. Αν $\vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OG} = \vec{0}$, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$ και $|\vec{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

α. να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. β. να βρείτε τη σχετική θέση των A, B, Γ.

γ. να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}$ είναι ορθογώνια δ. να αποδείξετε ότι η γωνία των $\vec{OA}, \vec{OG}$ είναι οξεία.

5. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, -2), \vec{\beta} = (2, 0)$ και $\vec{x}$ για τα οποία ισχύουν: $\bullet \vec{x} // (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \quad \bullet \vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ β. Να υπολογίσετε το $\sin(\vec{\beta}, \vec{x})$.

6. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ ώστε $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{AG} = \vec{\beta}$ και

$|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2$. α. Να αποδείξετε ότι: $\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$. β. Να βρείτε το $\sin(\vec{AB}, \vec{AD})$.

7. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2 \cdot \vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta}$,

$\vec{v} = \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

A. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. B. Τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$.

Γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Δ. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$.

8. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = -3 \cdot \vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

είναι $\frac{2\pi}{3}$. α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(4 \cdot \vec{\beta} + 2 \cdot \vec{\alpha})^2$, $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$.

β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{BG}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

γ) Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{BG}$.

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$

α) Να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

γ) Αν το διάνυσμα $\vec{v} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} - \kappa \cdot \vec{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$, να βρείτε την τιμή του κ .



10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από σημείο $A(2, -3)$ και
 i. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$. ii. σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία $\omega = 150^\circ$
 iii. είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : y = -x + 2$ iv. είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = \frac{3x}{2} - 1$.
 v. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, 0)$. vi. είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-5, 0)$
12. Δύο ύψη ενός τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν εξισώσεις $y = -x$ και $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του $AB\Gamma$.
13. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Δίνεται η κορυφή $A(1, 1)$, η εξίσωση της διαμέσου $\mu_\gamma : y = -x + 1$ και του ύψους $u_\beta : y = 2$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B, Γ .
14. Δίνεται η εξίσωση: $-x - 2 + \lambda(2x + 3y - 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)
 α) Να αποδειχθεί ότι: i) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 ii) Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
 β) Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία (η): $y = \frac{1}{2}x + 3$;
15. Δίνεται η εξίσωση: $y^2 - 3x^2 = 0$ (1)
 i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
 ii. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x' κάθε μία από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
 iii. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $\eta : x + y = 0$ με την ε_1 και με την ε_2 .
16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + 2y + 3 = 0$. α) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. γ) Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
17. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda x + 3$, $\varepsilon_2 : y = (2\lambda - 1)x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Αποδείξτε ότι για τις τιμές του λ που οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, το σημείο τομής τους βρίσκεται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
 β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία ε να είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών $\delta_1 : y = x - 2$, $\delta_2 : \alpha x - \beta y + 3 = 0$.
18. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : \sqrt{3}x + y + 5 = 0$.
 α) Αποδείξτε ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται. β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
19. Έστω τα σημεία $A(\lambda + 2, 2\lambda + 1)$, $B(\lambda - 3, 3\lambda - 2)$ και $\Gamma(0, 3\lambda - 5)$.
 α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OM}$.
 γ. Να βρείτε το λ , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο B .
 δ. Να βρείτε το λ , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι 8τ.μ.
20. Α. Έστω τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$ και η ευθεία $\varepsilon : x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι 4.
- Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\frac{d(M, \varepsilon_1)}{d(M, \varepsilon_2)} = 2$, όπου $\varepsilon_1 : x - 2y = 0$
 και $\varepsilon_2 : x + 2y = 0$.
- Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = 2$, όπου $A(-5, 0)$ και $B(3, 1)$.



21. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) έχει κέντρο το $K(3, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(7, 3)$ β) έχει κέντρο το $K(3, -1)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : y = 2x + 3$
γ) έχει κέντρο το $K(3, -1)$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$ δ) έχει κέντρο το $K(3, -1)$ και εφάπτεται του άξονα $y'y$
ε) έχει κέντρο το $K(3, -1)$ και αποκόπτει από την ευθεία $\varepsilon : 2x - 5y + 18 = 0$ χορδή μήκους 6 .
22. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) έχει αντιδιαμετρικά τα σημεία $A(5, -2)$ και $B(-1, -4)$
β) διέρχεται από τα σημεία $A(2, -6)$, $B(1, 7)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon : 3x + 2y = 0$
γ) εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 3y - 2 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x + 3y + 4 = 0$ και το ένα από τα δύο σημεία επαφής είναι το $A(1, -2)$
23. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) το σημείο επαφής είναι το $A(1, \mu)$, $\mu > 0$ β) η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$
γ) η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = -x + 13$.
24. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο. β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) , όπου το A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν τη μικρότερη απόσταση.
δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 , το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.
25. Δίνονται οι κύκλοι c_1, c_2 με εξισώσεις $c_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ και $c_2 : (x + 2\kappa)^2 + (y - \lambda)^2 = 25$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο $K_1(2, 1)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.
β) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ έτσι ώστε οι κύκλοι C_1 και C_2 να έχουν το ίδιο κέντρο .
γ) Να εξετάσετε, αν τα σημεία $A(4, 1)$, $B(1, 1)$ ανήκουν στο κύκλο C_1
26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2, 1)$.
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2, 1)$
γ) Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν τριγώνου MAB
27. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0, 0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(-1, 4)$
β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$
γ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E(0, -4)$ δ) έχει διευθετούσα $\delta : x - 2 = 0$
ε) η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα είναι ίση με 6 .
28. Από το σημείο $A(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες .
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών ευθειών. β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
29. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x - 1$.
- α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής. β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής .
γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
30. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$. και το σημείο $M(t^2, 2t)$ $t \neq 0$.
- i) Φέρνουμε την $MA \perp Oy$ και από το σημείο A φέρνουμε ευθεία (ε) κάθετη στην OM . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο T όταν το t διέρχεται από το R^*
ii) Αν $N(\mu^2, 2\mu)$ ένα άλλο σημείο της παραβολής τέτοιος ώστε $OM \perp ON$ να αποδειχθεί ότι η ευθεία MN διέρχεται από το T .
31. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) έχει εστίες $E'(-3, 0)$, $E(3, 0)$ και μεγάλο άξονα 10 β) έχει εστίες $E'(0, -3)$, $E(0, 3)$ και μικρό άξονα 8
γ) έχει εστίες $E'(-4, 0)$, $E(4, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$ δ) έχει κέντρο το $(0, 0)$, εστιακή απόσταση 12 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.
32. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, η οποία σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox, Oy ισοσκελές τρίγωνο.



33. Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

34. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x - y + 1 = 0$ και έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη (C):

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

35. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει εστίες $E'(-3, 0)$, $E(3, 0)$ και απόσταση κορυφών 4 β) έχει εστίες $E'(0, -6)$, $E(0, 6)$ και εκκεντρότητα 2

γ) έχει εστίες $E'(-4, 0)$, $E(4, 0)$ και ασύμπτωτη την ευθεία $y = 5x$

δ) έχει κέντρο συμμετρίας το $(0, 0)$, εστιακή απόσταση 10 και απόσταση κορυφών 8.

ε) έχει κέντρο συμμετρίας το $(0, 0)$, είναι ισοσκελής και ένα σημείο της είναι το $M(1, 4)$

στ) έχει κέντρο συμμετρίας το $(0, 0)$, ασύμπτωτη την ευθεία $y = -\frac{4}{3}x$ και εστιακή απόσταση 20.

36. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές υπερβολής με εστίες στον y' , της οποίας η μια ασύμπτωτη

έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν: α) οι εστίες της υπερβολής β) η εστιακή της απόσταση γ) η εξίσωσή της

δ) η εκκεντρότητά της και ε) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής.

37. Α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Γ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής $x^2 - y^2 = 16$, οι οποίες σχηματίζουν γωνία 120° με τον άξονα $x'x$

38. Δίνεται η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν ε' είναι η κάθετη

στην εφαπτόμενη ε της C στο M και Γ, Δ τα σημεία τομής της ε' με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα τότε:

α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της ε' β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του $\Gamma\Delta$ δ) να αποδειχθεί ότι το N βρίσκεται μια υπερβολή C_1 .

39. Θεωρούμε τις ελλείψεις: $C_1: \frac{x^2}{\beta^4} + \frac{y^2}{\alpha^4} = 1$, $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $1 < \alpha < \beta$. Από σημείο $K(x_0, y_0)$ του C_1 φέρνουμε εφαπτόμενες στην C_2 και έστω Λ και N τα σημεία επαφής.

i) Να βρεθεί η εξίσωση της ΛN . ii) Να δείξετε ότι η ΛN είναι εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 1$.

40. Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ $0 < \beta < 2$, και το σημείο της $M(x_0, y_0)$ $x_0 \cdot y_0 \neq 0$

i) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της (C) στο σημείο της M καθώς και την εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε).

ii) Έστω ότι η ευθεία (δ) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $T(4, 0)$ και ε η εκκεντρότητα της υπερβολής.

Να αποδειχθεί ότι: α) $x_0 = \frac{4}{\varepsilon^2}$ και β) $1 < \varepsilon \leq \sqrt{2}$