



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΥΘΕΙΑ – ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ »

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

2.18575. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$

2.18600. Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 .

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2 . ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

2.18601. Έστω $M(3, 5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε: i) τις συντεταγμένες του σημείου B .

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $\chi' \chi$ έτσι ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$.

2.18602. Δίνεται η ευθεία (ε): $y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε).

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε).

2.20060. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο

$$A(1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$$

2.20063. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο M και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου ε του ευθυγράμμου τμήματος AB , καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $\chi' \chi$ και $\gamma' \gamma$.

2.20066. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(2,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$. β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους $B\Delta$ και της διαμέσου AM .

2.22517. Θεωρούμε τα σημεία $A(6, \mu)$ και $B(\mu+2, \mu+1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ , το σημείο $\Gamma(4, 2)$ περιέχεται στην ευθεία AB

4.20147. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1, \lambda-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$.

β) Αν το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ , να βρείτε την τιμή του λ .

γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος



2.20068. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5,4)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(4,1)$ και σημείο M της πλευράς AB για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .
- γ) Αν το σημείο M έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ , M .

4.22563. Θεωρούμε το σημείο $M(-3, -2)$ και ευθεία που διέρχεται από το M και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία A , B .

- α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός.
- β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
 - i. Να αποδείξετε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$.
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

2.18584. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2: 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 .
- γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

2.18587. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M . Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M , A και B .
- β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$.

2.18589. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 8x + y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. 18592. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + y - 5 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

2.18595. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:
 - i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ
 - ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$



2.20065. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5, 1)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

2.20072. Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της (ε). Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην (ε).

Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της ευθείας (ε).
- β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ε).

2.22520. Έστω $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(-1, 3)$ τρία σημεία του επιπέδου.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ ώστε: $3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: 5x - 3y + 1 = 0$.
- β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο K του τμήματος AΓ.

2.22531. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1)

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία.
- β) Αν (ε_1), (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda=1$, $\lambda=2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

2.22525. Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ οι πλευρές του AB και AD βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: 2x + y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο $K(-1, -2)$, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0, -6)$.
- β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

4.22562. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t + 6, 0)$, $B(0, 4t - 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB.
- β) Να δείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε.
- γ) Αν $(AB)=d$, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα A, B ώστε η απόσταση (AB) να είναι ελάχιστη.

4.22564. Θεωρούμε τις εξισώσεις $\varepsilon_\lambda: (\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_λ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.
- β) Έστω $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$. Αν η (ε_λ) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ αντίστοιχα, τότε:
 - i. να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ .
 - ii. να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$.

4.22565. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.
Έστω $\varepsilon_1: x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + y = 3$ οι δυο ευθείες.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή O και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A, B ώστε $(AB)=2$.



ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

2.18620. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2 : (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2, -1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.
- β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A , να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ) Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2.20062. Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B .
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

2.20067. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3,2)$, $B(-3,1)$ και $\Gamma(4,0)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .
- β) Να υπολογίσετε το ύψος $\Gamma\Delta$ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό.

2.22506. Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, όπου $\alpha\beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$.

- α) Να αποδείξετε ότι $AB: y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$.
- β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία AB , τότε:
 - i) να βρείτε την εξίσωση της ε .
 - ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο K και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι

$$(OK\Lambda) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}, \text{ όπου } O \text{ είναι η αρχή των αξόνων.}$$

2.22521. Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda+1, 2\lambda)$, $B(2-\lambda, 4)$ και $\Gamma(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ , τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.
- β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(AB\Gamma)=3$.
 - i. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ ή $\lambda=2$.
 - ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B}$ όταν $\lambda=1$.

2.22522. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : y = x + 1$ και τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(6, -3)$.

- α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$.
- β) Έστω $\Gamma(1, 12)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2.22523. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa - 1$, όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

- α) Να βρείτε με τη βοήθεια του κ , τα σημεία τομής A, B της ευθείας με τους άξονες $x'x$, $y'y$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
- β) Αν ισχύει $(OAB) < 2$ να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

2.22529. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το A δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή.
- β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το A απόσταση ίση με 3 μονάδες.



- 2.22537.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda-1, \lambda+2)$ και $B(\mu+3, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$ και $\varepsilon_2 : y = x - 3$ αντίστοιχα.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- 2.22538.** Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(t-1, 3t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.
 - Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι ανεξάρτητα του t.
- 4.22568.** Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-1, 3)$ και $B(2, -1)$ ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν $(MAB)=4$.
- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες μεταξύ τους.
 - Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- 4.22571.** Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(2\lambda+1, 1-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι σταθερό.
 - Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην AB.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την BΓ.
- 4.22577.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_\lambda : x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M.
 - Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_1) \leq \sqrt{10}$
 - Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το O.
- 4.22588.** Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(0, 2)$.
- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ ώστε $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{GM}^2 = 3$ είναι η ευθεία $\varepsilon : x - 2y + 1 = 0$.
 - Να βρείτε:
 - Σημείο K στον άξονα x'x ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα y'y.
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y'y.
- 4.18609.** Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\overline{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overline{AT} = (3\lambda, \lambda-1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς BΓ
- Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$.
 - Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overline{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$.
 - Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.



4.18610. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$
- γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία A και B αντίστοιχα τότε:
 - i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .
 - ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$.

4.18611. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$

4.18612. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.
- β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2
- γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:
 - i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B
 - ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ να είναι τετράγωνο.

4.18623. Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ .
- β) Να αποδείξετε ότι:
 - i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ .
 - ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ;

4.18613. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.
- β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .

4.18614. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα y' στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα x' στο σημείο Γ , τότε:
 - i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ .
 - ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KBF) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.



- 4.18615.** Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y = x$, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν το σημείο $M(3, 5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:
- α)** να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
 - β)** να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.
 - γ)** να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$
- 4.18617.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 12)x + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 12)y - 5 = 0$ (1).
- α)** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$.
 - β)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 3 \cdot \vec{\alpha}$.
 - γ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = -3 \cdot \vec{\alpha}$.
 - δ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$
- 4.18621.** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa x - (1 + \kappa)y + 1 - 3\kappa = 0$ και $\zeta: (1 + 3\kappa)x + (\kappa - 1)y + 2 - 6\kappa = 0$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$
- α)** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.
 - β)** Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .
- 4.18622.** Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu - 4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.
- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$
 - β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B .
 - γ)** Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB}$.
 - δ)** Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.