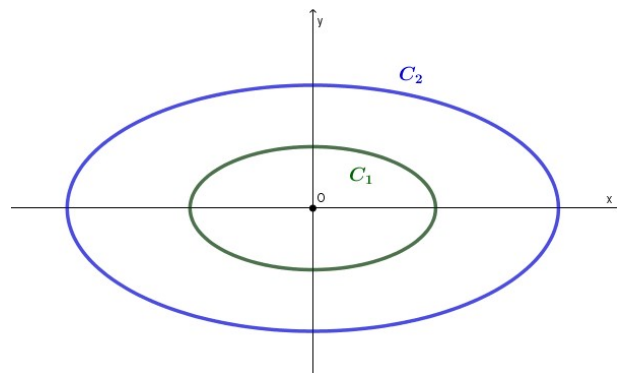




ΕΛΛΕΙΨΗ – ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2- 20865

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.
β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

ΘΕΜΑ 2- 20658

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c) .
γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΘΕΜΑ 2 - 21648

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. β) Να βρείτε την εξίσωση της C .
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$. Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

ΘΕΜΑ 2- 21647

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της C . β) την εκκεντρότητά της C . γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$.

ΘΕΜΑ 2- 20718

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της. β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.



ΘΕΜΑ 2- 22564

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις

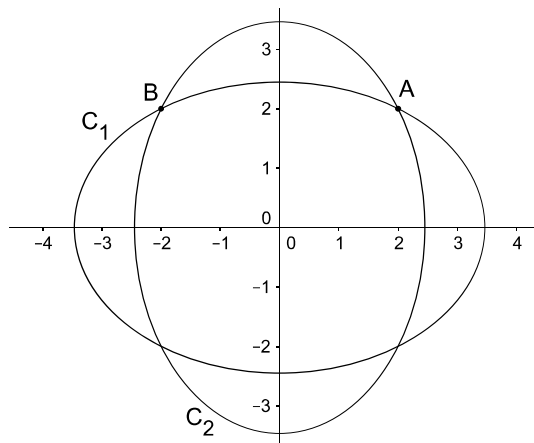
δύο ελλείψεις.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_1 της έλλειψης C_1

στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_2 της έλλειψης C_2

στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 είναι κάθετες.



ΘΕΜΑ 2- 22558

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$

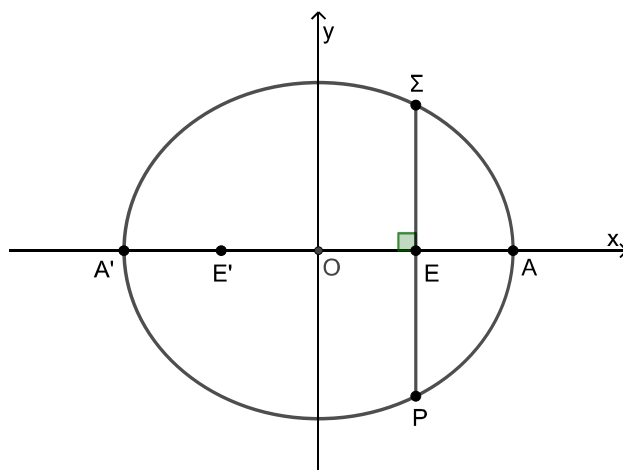
και $E(2, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2, 0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.



ΘΕΜΑ 2- 22556

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$,

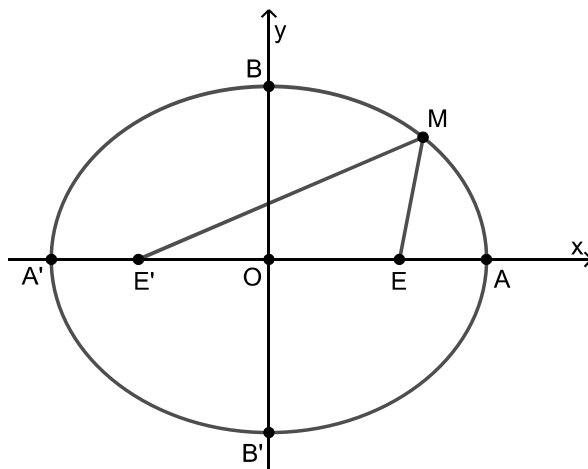
$A(5, 0)$, $B'(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$.

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$.

β) Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$.



**ΘΕΜΑ 2- 22268**

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

- α) Να βρεθούν οι εστίες της, τα μήκη των αξόνων της καθώς και η εκκεντρότητα
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της $B(0,-2)$.

ΘΕΜΑ 2- 22168

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε: i. Την εξίσωση της παραβολής. ii. Την εστία E της παραβολής.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο 4

ΘΕΜΑ 2 - 22192

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1)

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' . β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0,9)$.

ΘΕΜΑ 2 - 21308

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.
β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.
γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

ΘΕΜΑ 2- 20883

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

- α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' .
β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

**ΘΕΜΑ 4 - 21655**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη C με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0), A'(-5,0), B, B'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:

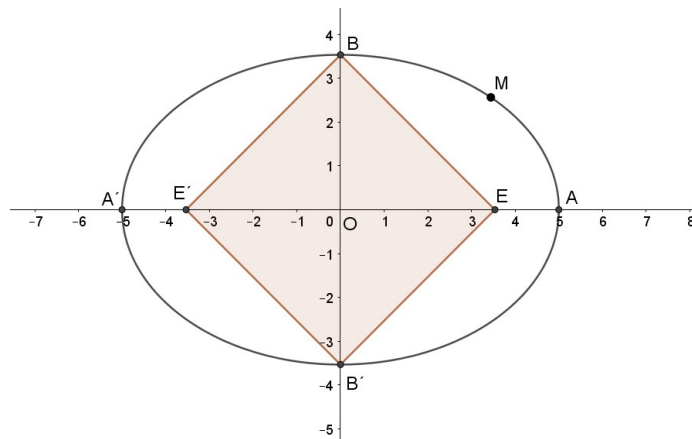
α) τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E' .

β) την εξίσωση της έλλειψης C .

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της C , που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' .

i. να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.

ii. να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε.

**ΘΕΜΑ 4 - 20722**

Έστω $K(x, y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $(\varepsilon): 3x + 5y = 25$.

β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε .

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{ME'E'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

ΘΕΜΑ 4- 22273

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες:

- Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Των εστιών E και E' της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$ και εφάπτονται στην έλλειψη (1)