



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΗ»

1. Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x_1x + y_1y = \rho^2$.

Β. α) Στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. $K(0, -1)$, $\rho = 2$ 2. $K(2, -1)$, $\rho = 3$
ii. $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$	3. $K(3, -2)$, $\rho = 1$ 4. $K(1, 1)$, $\rho = 2$ 5. $K(3, -2)$, $\rho = 4$

β) Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(1, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$ έχει εξίσωση:

Α. $x^2 + y^2 = 8$

Β. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$

Γ. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Δ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Ε. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

γ) Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$

Β. $5x - y = 8$

Γ. $-x + 3y + 10 = 0$

Δ. $3x + 2y = 3$

Ε. $\frac{1}{2}x + y = 5$

2. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

α) Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β) Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

3. Δίνονται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ και η ευθεία (ε): $\chi \sin \theta + y \eta \mu \theta - 1 - \sin \theta = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Να βρείτε: α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C)

β) την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία (ε).

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου (C).

3. Να βρείτε το $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε η (ε) να σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 120° .

3. α. Να δείξετε ότι το σημείο $M(2t^2, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$ κινείται σε παραβολή C της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB της παραβολής C που έχει το σημείο $N(2, -1)$ ως μέσο.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C που είναι παράλληλη στην AB.



4. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$, $C_2: x^2 + y^2 + 3x + 4y + \lambda = 0$, και $C_3: x^2 + y^2 - x - y + \lambda = 0$.

- Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:
1. Οι κύκλοι C_1, C_2 να εφάπτονται εξωτερικά.
 2. Οι κύκλοι C_1, C_3 να εφάπτονται εσωτερικά.

5. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = r^2$ διέρχεται από την εστία της παραβολής $y^2 = 2px$ με $p > 0$ και την τέμνει σε 2 σημεία με τετμημένη 1. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.

6. Από το σημείο $A(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών ευθειών.
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

- α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.
- γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.

8. Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)^2 + (y+3)^2 + \lambda(3x+y-10) - 20 = 0$ (1)

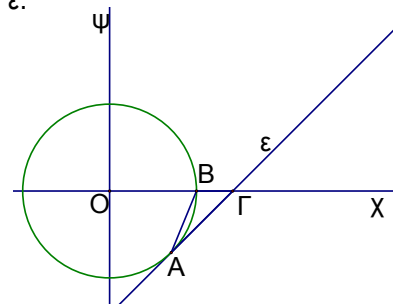
1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων συναρτήσει του λ .
3. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της παραπάνω εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B .
4. Αν τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -2x - 8$ να βρείτε την τιμή του λ .

9. Έστω σημείο $A(4, 4)$ της παραβολής $\psi^2 = 2px$, με $p \neq 0$.

1. Να δείξετε ότι η παραβολή είναι η $\psi^2 = 4x$ και να βρείτε την εστία της E και την διευθετούσα της δ .
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ , της παραβολής στο P .
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(-1, 2)$, που εφάπτεται στην ϵ .

10. Έστω σημείο $A(1, -2)$ του κύκλου C , με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

1. Να δείξετε ότι ο C έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ , του κύκλου στο A .
3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου B και Γ σημεία που ο κύκλος και η ϵ τέμνουν τον x' , αντίστοιχα.
(Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα)



11. Δίνεται κύκλος $c_1: 8x^2 + 8y^2 - 8x - 7 = 0$ και η παραβολή $c_2: y^2 = 4x$.

1. Να βρείτε τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 της παραβολής, που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$
2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου c_1 και να δείξετε ότι οι ϵ_1, ϵ_2 εφάπτονται και στον κύκλο c_1 .
3. Να βρείτε τη γωνία των εφαπτόμενων ϵ_1 και ϵ_2 .

12. Ένας κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x + 4y - 25 = 0$

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C .
2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του C , οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $4x - 3y + 2 = 0$.



- 13.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sin\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
 2. Αν $\theta = \pi/2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$.
 3. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
- 14.** Έστω ότι η παραβολή C έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x' και εστία το σημείο $E(1, 0)$.
- α. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
 - β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
 - γ. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- 15. Α.** Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 2$ στο σημείο του $A(-1, 1)$.
- Β.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x - y + 2) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
1. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
 2. Για $\lambda = 2$, να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση (1).
 3. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1),
 - i. διέρχονται από σταθερό σημείο.
 - ii. εφάπτονται της ευθείας ε (του ερωτήματος Α).
 - iii. εφάπτονται μεταξύ τους.
- 16.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (y - 1)^2 - \mu(x - y) = 1 + 2\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$).
- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του μ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 - β. Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στον άξονα x' .
- 17.** Αν $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: (x + 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8}$ να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C_1 στο $A(1, 2)$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .
- 18.** Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + y^2 + 16x + 12y - 525 = 0$ και $x^2 + y^2 = 225$.
- α) δείξτε ότι παριστάνουν κύκλους των οποίων να βρεθούν τα κέντρα και οι ακτίνες.
 - β) δείξτε ότι εφάπτονται εσωτερικά και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.
- 19.** Έστω η εξίσωση $x^2 + 4x\sigma\upsilon\nu\varphi + y^2 + 4y\eta\mu\varphi = \kappa^2 - 4$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.
- α) δείξτε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
 - β) να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με $K(0, 0)$ και $\rho = 2$.
 - γ) να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων όταν $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$ αν είναι γνωστό ότι εφάπτονται εξωτερικά.
- 20. Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6 \cdot \mu \cdot x + 8 \cdot \lambda \cdot y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .
- Β.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση: $3\mu + 2\lambda = 0$.
- α) Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6 \cdot \mu \cdot x + 8 \cdot \lambda \cdot y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ, λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - β) Να βρείτε τα μ, λ έτσι ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y = 2$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.



21. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 25$

- α) Όταν το σημείο $M(1,2)$ είναι μέσο της
- β) Όταν διέρχεται από το σημείο $(-1,3)$ και έχει μήκος ίσο με 8.

22. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) Όταν το κέντρο K ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(3,0)$
- β) Όταν έχει ακτίνα $\rho=5$ και διέρχεται από τα σημεία $A(6,2)$ και $B(0,2)$

23. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 5 = 0$

- α) Να βρείτε το λ , ώστε ο κύκλος C να εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 7$
- β) Για $\lambda=1$, να βρείτε την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$

24. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 16x$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την εστία της και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $4x + 3y + 2024 = 0$.
- β. Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή στα σημεία A και B να βρείτε τις συντεταγμένες τους.
- γ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B τέμνονται κάθετα και ότι το σημείο τομής τους ανήκει στην διευθετούσα της παραβολής.

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - 2 \cdot y \cdot \eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$
- γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.