

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****ΘΕΜΑ 1° :**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - (10 + a)x^2 + \beta$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ με τιμή -2 , τότε:

- α) να βρείτε τις τιμές των a και β . β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) να βρείτε όλα τα τοπικά ακρότατα της f
δ) να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$
ε) να βρείτε το σύνολο των τιμών της f στ) να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f
ζ) να αποδείξετε ότι $3x^4 + 4x^3 + 32 \geq 12x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2° :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$.

- α) Να βρείτε f' και την f'' . β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(0, f(0))$.
γ) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f' . δ) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f .
ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο. στ) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x^2 = x + 1$
ζ) Να αποδείξετε ότι $e^x - 1 \geq x(1 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 3° :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει άξονα ή κέντρο συμμετρίας. ε) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.
ζ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - ax^2 - 4x + a = 0$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

**ΘΕΜΑ 4° :**

- A.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στο $[α, β]$, είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $[γ, δ]$. Αν η f' είναι συνεχής στο $[α, β]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f^{-1}(x)dx = \beta\delta - \alpha\gamma.$$

- B.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^5(x) + 5f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε την f^{-1} και να υπολογίσετε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ όταν $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$.

ΘΕΜΑ 5° :

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 2x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A.** Να αποδείξετε ότι:

α) $2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

β) ο τύπος της f δίνεται από τη σχέση $f(x) = x^2 + 1$

- B.** Δύο εφαπτομένες της C_f διέρχονται από το σημείο $M(3,9)$. Να βρείτε:

α) τα σημεία επαφής της C_f με τις εφαπτομένες αυτές.

β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών.

ΘΕΜΑ 6° :

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

• $f'(0) = 0$

• $f(x + \psi) = e^x f(\psi) + e^\psi f(x) + 2x\psi e^{x+\psi}$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$

- α)** Να δείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$.

ii) $f'(x) = f(x) + 2xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x) - x^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iv) ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R}$.

- β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = t < 0$.

- γ)** Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow -\infty} E(t)$