

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 10****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x^2 - x)f'(x) + xf(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & , 0 < x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$.

2. Να αποδείξετε ότι $xf(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x = 2$, $x = e + 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με

Εργασία 2^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

3. i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < \frac{-\sqrt{2} + 1}{3}$

**Εργασία 3^η**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.
2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(2f'(x)) = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$.

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$.

Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (xf'(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Εργασία 4^η

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $2xf'(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ • $f(1) = \frac{1}{2}$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος 1.
3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$
4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$