

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 11****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, $\alpha \neq \beta \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Αν η f^{-1} είναι συνεχής και ισχύει $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$

i) Να βρεθεί το $f(\beta)$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x - y + 2018 = 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι

i) Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

ii) Υπάρξουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Εργασία 2^η:

α) Να αποδειχθεί ότι $x - \ln x \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

β) Οι όχθες ενός ποταμού ακολουθούν τις γραμμές $y = x$ και $y = \ln x$. Να βρεθεί το μήκος της μικρότερης γέφυρας μεταξύ των δύο ποταμών που μπορεί να κατασκευασθεί.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x - \ln x}$, $x > 0$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της.

δ) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $3x = e^x(x - \ln x)$ έχει δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$.

Εργασία 3^η:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x) \leq x^2 - 3x + 1 + \frac{f(0) + f(1)}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(0) - f(1) = 2$.

β) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) - f(1) = \frac{3}{2}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ και $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = -2$.

δ) Να αποδειχθεί ότι $f'(0) - f'(1) = -2$.

**Εργασία 4^η:**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$.

β) Να βρεθούν το πεδίο τιμών και οι ασύμπτωτες της f .

γ) Για βρεθεί για ποιους φυσικούς αριθμούς n ισχύει $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$.

δ) Αν $g(x) = 2\sqrt{x}(-2 + \ln x), x > 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της g παράλληλες μεταξύ τους και τη γωνία που ω σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ να ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Εργασία 5^η:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x+y) = e^{xy} f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, f' συνεχής στο μηδέν, $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 0$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx$.