

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 12****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ»****Εργασία 1^η:**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$
- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να ερμηνευτεί γεωμετρικά.
- A3.** Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ .
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- β)** Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- γ)** Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε και $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- δ)** Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ και είναι κοίλη τότε $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$.
- ε)** Μια συνάρτηση που παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα στο πεδίο ορισμού της παρουσιάζει σίγουρα ένα σημείο καμπής.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln x - \frac{x^2}{2} + ax$ και $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x > 0$.

- B1.** Να δείξετε ότι $a = 1$.
- B2.** Να βρεθούν η μονοτονία, τα ακρότατα και η κυρτότητα της συνάρτησης f .
- B3.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x+2}{4} - \frac{3}{2x}}$.
- B4.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 2$ και να δείξετε ότι: $2\ln x - \frac{x^2}{2} + x \leq 2\ln 2$.

Εργασία 3^η:

Ο Δημήτρης και ο Γιώργος δύο φίλοι, μαθηματικοί, κατά τις καλοκαιρινές τους διακοπές σχεδιάζουν την διαδρομή τους για το καθιερωμένο βραδινό ψάρεμα. Αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στα ανοιχτά της θάλασσας,



ο Δημήτρης θα κινηθεί πάνω στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^5 - x^3 + x$, $x \geq 0$ με σημείο εκκίνησης το $O(0,0)$, ενώ ο Γιώργος την ίδια χρονική στιγμή θα ξεκινήσει από το ίδιο σημείο και θα κινηθεί πάνω στην $f^{-1}(x)$.

Γ1. Να δείξετε ότι οι δύο φίλοι συναντιούνται και να βρεθεί το σημείο συνάντησης.

Γ2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Γιώργου από τον x' x την χρονική στιγμή της συνάντησης, αν θεωρήσουμε την $f^{-1}(x)$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0) \in (0,1)$ στο οποίο οι δύο φίλοι έχουν την ίδια ταχύτητα απομάκρυνσης από τον x' x .

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται μεταξύ των δύο καμπύλων που κινούνται οι δύο φίλοι.

Εργασία 4^η: Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

1. $(e^x - 1) \cdot f(x) + (e^x - x) \cdot f'(x) = (e^x - x) \cdot f(x) + 1$. 2. $\int_0^{f(0)} (e^{x^2} + x^2) dx = f(0)$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, όπου F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

4. $g(x) = e^{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και 5. G μια παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$ με $G(1) = 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και να βρεθεί ο τύπος της f

Αν επιπλέον $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα για την f στα x_0, x_1 με $x_0 < 1 < x_1$ και να βρεθεί το είδος τους.

Δ3. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{F(x)}{x} + x \text{ στο } +\infty.$$

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot x - F(x) > f(x) - F(1)$, για κάθε $x \in (1, x_1)$.

Δ5. Να δείξετε ότι: $\int_1^0 G(x) dx < \int_0^{G(2)} G^{-1}(x) dx$.