

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 13****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$.

- α) Να βρείτε την f' .
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες την C_f .
- δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την C_f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = -1$.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}$.

- α) Να βρείτε την f' .
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ τις ευθείες $x = e^2$ και $x = e^3$.

Εργασία 3^η:

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τα ακρότητα και τα σημεία καμπής.
- β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω , που περικλείεται από την C_f την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = -\lambda$ με $\lambda > 0$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- ε) Να δείξετε ότι: $e^{-2} \cdot f(x) < 3x + 4$, για κάθε $x \in (-\infty, -2)$.
- στ) Να δείξετε ότι: $2a \cdot e^{a^2} > (a^2 + 2) \cdot e^{2a-2}$, για κάθε $a > \frac{1}{2}$.

**Εργασία 4^η:**

Δίνονται οι συναρτήσεις: $g: g(x) = \ln x + e^x - e, \quad x > 0$

$f: f(x) = e^x + x \cdot (\ln x - e - 1), \quad x > 0$

α) Ναδειχθεί ότι η $g(x)$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \cdot g(x)]$

Εργασία 5^η:

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(x) + f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e + 1$

α) Αφού βρείτε τον τύπο της f να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$

β) Να βρείτε το όριο: $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x \cdot y) \right)$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Εργασία 6^η:

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$ και $g(x) = e^x \cdot \ln x, \quad x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $g''(x) = e^x \cdot f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο περιέχεται.

δ) Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.