

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 14****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Για την παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x + 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γνωρίζοντας ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

1. να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
2. να δείξετε ότι $f(x) > \ln \frac{x+1}{2}$ για $x > -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
3. να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $\mathbb{R}$
4. να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την εφαπτόμενη στο $A(0, f(0))$
5. να δείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$
6. να βρείτε την f^{-1} και το $f(e)$
7. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της f και της f^{-1}
8. να υπολογίσετε το $\int_0^e f(x) dx$
9. να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις f , f^{-1}

Εργασία 2^η:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
2. Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ..., $\sqrt[n]{n}$ είναι μεγαλύτερος
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 2017^{2016} , 2016^{2017}
5. Αν $I(\alpha) = \int_1^\alpha \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \right) dx$, $\alpha > 0$ να δείξετε ότι $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{I(\alpha)}{\alpha - 1} = 1$.

**Εργασία 3^η :**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $e^{f(x)} \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] = x$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα 2 και 3, δίνεται ότι: $f^{-1}(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ των παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

Εργασία 4 : Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \ln x, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι $k=0$.

2. i) Να βρείτε την παράγωγο της f .

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει: $\frac{f(x+1) - f(x)}{x} > 1 + \ln x^2$.

5. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{f(x)}{x^2} \right) \cdot \eta\mu\chi \right]$

6. Να αποδείξετε ότι $2f(1+h) < f(1+2h)$, όπου $h > 0$.